LATVIJAS UNIVERSITĀTE
DATORIKAS FAKULTĀTE

Dažu kvantu spēļu analīze

BAKALAURA DARBS

Autors: **Madars Virza**
Stud. apl. nr.: mv07012
Darba vadītājs: profesors Andris Ambainis, Ph.D.

RĪGA 2011

Anotācija

Viens no veidiem, kā pamatot kvantu pasaules atšķirību no klasiskās ir kvantu spēles, kurās spēlētāju uzvaras varbūtība ir lielāka, ja tie lieto kopīgus kvantu stāvokļus. Darba mērķis ir atrast jaunus kvantu spēļu piemērus un metodes to analīzei. Šajā darbā ir veikta divu konkrētu spēļu analīze, kā arī pētīta nejaušo simetrisko spēļu klase. Tiek dots pilnīga Ardehali spēles klasiskā gadījuma analīze jebkuram spēlētāju skaitam. EQUAL-EQUAL spēle tiek analizēta jaunā "worst-case" modelī un pierādīts, ka tai ne "worst-case", nedz "average-case" varbūtību sadalījumiem nav kvantu priekšrocības, bet tāda parādās nesimetriskiem sadalījumiem. Tiek pierādīti arī kvantu un klasiskie novērtējumi nejauši izvēlētai spēlei no divu spēlētāju simetrisko spēļu klases. Darbā izmantotas gan klasiskās, gan eksperimentālās matemātikas metodes.
Atslēgvārdi: kvantu spēles, Ardehali spēle, nejaušas simetriskas spēles, eksperimentālā matemātika

Abstract

One way of showing the difference between quantum and classical worlds is via quantum games, for which players have higher probability of winning, if a shared quantum state is being used. The purpose of this thesis is to find new examples of quantum games and new methods for analyzing them. This thesis contains analysis of two explicit quantum games and investigation of the class of random symmetric games. We give complete analysis of classical strategies for the Ardehali game. EQUAL-EQUAL game is being analyzed in a novel "worst-case" model and we prove that for both "worst-case" and "average-case" probability distributions it has no quantum advantage, but it has such advantage for non-symmetrical distributions. We prove quantum and classical bounds for a randomly chosen two player symmetric game. The work makes use of both classical and experimental mathematics.
Keywords: quantum games, Ardehali game, random symmetric games, experimental mathematics

Saturs

Ievads **1**

1. Problēmas pamatnostādne un literatūras apskats **3**

1.1. Problēmas pamatnostādne 3

1.2. CHSH spēles klasisko stratēģiju analīze 5

1.3. Tsirelson redukcija kvantu spēļu analīzei 6

1.4. CHSH spēles kvantu stratēģiju analīze 7

1.5. Apsvērumi par ievaddatu sadalījumu 9

2. Ardehali spēles analīze **10**

2.1. Spēles apraksts un motivācija 10

2.2. Klasisko stratēģiju analīze 10

2.3. Rezultāti par kvantu stratēģijām un diskusija 14

3. EQUAL-EQUAL spēles analīze **16**

3.1. Spēles apraksts un motivācija 16

3.2. Daži apsvērumi par varbūtību sadaījumiem 16

3.3. Klasisko stratēģiju analīze 17

3.4. Kvantu stratēģiju analīze 20

3.5. Rezultāti un diskusija 24

4. Nejaušu simetrisku spēļu analīze **26**

4.1. Spēļu klases apraksts un motivācija 26

4.2. Klasisko stratēģiju analīze 27

4.3. Kvantu stratēģiju analīze 28

4.4. Rezultāti un diskusija 30

Noslēgums **32**

Pateicības **33**

Literatūra **34**

A. Izstrādāto eksperimentu un pārbaužu pirmkods **36**

A.1. `rekurences.nb` – Ardehali spēles rekurenču pārbaude 36

A.2. `paarbaude.m` – EQUAL-EQUAL spēles novērtējumu pārbaude ar semidefinito programmēšanu 36
A.3. `symmgames.cpp` – datoreksperiments optimālo uzvaras varbūtību noskaidrošanai simetriskām spēlēm 37
A.4. `sym-nov.nb` – datoreksperimenti simetrisko spēļu analīzei 39
A.5. `paarsn.nb` – datoreksperiments kvantu apakšējā novērtējuma precizitātes noteikšanai 39
A.6. `equal-strat.cpp` – datoreksperiments ekvivalento klasisko stratēģiju noteikšanai 40

Ievads

Kvantu skaitļošana ir datorizinātnes nozare, kurā skaitļošana notiek elementārdaļiņu līmenī un izmantotais modelis atbilst kvantu mehānikai fizikā. Kvantu datori fundamentālā veidā izmanto mikropasaules īpašības, piemēram, sapinumu (*entaglement*) vai mērījuma destruktīvo dabu (mērot vairāku stāvokļu superpozīciju tā pēc mērījuma kolapsē un sevī nes tikai informāciju, kas ir konsistenta ar mērījuma rezultātu), kurām abām klasiskajā pasaulē īstu analogu nav.

Pirmās idejas par kvantu skaitļošanu radās Ričarda Feinmana rakstā [1] par fizikas simulēšanu ar klasiskajiem datoriem. Tajā tika secināts, ka lai simulētu n daļiņu sistēmu ir nepieciešami 2^n kompleksu koeficientu pāri. Tāpēc kvantu sistēmu vispārīgajā gadījumā, izmantojot klasiskos datorus, efektīvi simulēt nevar un tika piedāvāts jauns skaitļošanas modelis – kvantu datori. Tomēr izrādās, ka kvantu datori ir piemērojami arī problēmām, kuras šķietami nav saistītas ne ar kvantu fiziku, ne fiziku vispār.

Daudzām praktiski noderīgām un teorētiski interesantām problēmām nav zināmi efektīvi algoritmi, to atrisināšanai izmantojot klasisko skaitļošanas modeli, bet ir zināms efektīvs kvantu algoritms to atrisināšanai. Divi vispārzināmi šādu problēmu piemēri ir meklēšanas problēma (Grovera algoritms [2]) un skaitļa sadalīšana pirmreizinātājos (Šora algoritms [3]). Jāņem vērā, ka vairākām šādām problēmām ir zināms, ka atrastie kvantu algoritmi ir ne tikai asimptotiski optimāli, bet arī pierādāmi efektīvāki par jebkuru klasisku algoritmu, kas risina šo problēmu.

Minēto kvantu algoritmu eksistence rāda, ka kvantu pasaule ir fundamentāli atšķirīga no klasiskās — ar kvantu datoru mēs varētu izdarīt daudz vairāk nekā ar klasisko. Tomēr datorzinātne kvantu pasaules atšķirību no klasiskās var demonstrēt arī citādi — ar kvantu spēlēm.

Vispazīstamākais kvantu spēles piemērs ir Clauser–Horne–Shimony–Holt (CHSH) spēle, kurā divi spēlētāji spēlē pret tiesnesi. Katrs no spēlētājiem no tiesneša saņem vienu klasisku bitu un kā savas spēles iznākumu arī paziņo tiesnesim vienu bitu. Spēlētāji uzvar tad, ja ir izdevuši atšķirīgus rezultātus un abi saņēmuši bitus, kas vienādi ar 1, vai arī izdevuši vienādus rezultātus un vismaz viens saņēmis bitu, kas vienāds ar 0; komunikācija starp spēlētājiem ir aizliegta. Var parādīt, ka uzvaras varbūtība "klasiskajā pasaulē" ir 0.75, kamēr, ja spēlētājiem ir pieejams kopīgs kvantu stāvoklis, tad tie var uzvarēt ar varbūtību ≈ 0.85.

Tomēr kvantu spēles nav tikai vēl viens veids kā demonstrēt kvantu pasaules "pārākumu", un lai gan tās pašas par sevi, autoraprāt, ir teorētiski interesantas, tomēr tām ir sagaidāmi ļoti praktiski pielietojumi. Jau tagad notiek darbs, lai, izmantojot kvantu spēļu teoriju, radītu jauna veida izsoļu protokolus [4], kas ļautu publiskajos iepirkumos potenciāli ietaupīt miljardiem dolāru. Un atšķirībā no kvantu algoritmiem, kuriem vēl neeksistē efektīvas fizikālas realizācijas interesantiem problēmu izmēriem, vairākām kvantu spēlēm šādas realizācijas eksistē [5].

Tāpat kvantu spēlēm ir liela teorētiska nozīme. Tās var izmantot, lai nodrošinātu kvantu kriptogrāfijas protokolus, kas ir droši pret *side-channel attacks* (šādus protokolus sauc par *device independent cryptography*), kā arī palīgrīku citu teorēmu būvēšanā. Piemēram, viens no veidiem, kā pierādīt PCP teorēmu par varbūtiski pārbaudāmiem pierādījumiem (*probabilistically checkable proofs*), izmanto nelokālu spēļu klasiskās versijas. PCP teorēma ir viens no spēcīgākajiem rīkiem algoritmu sarežģītības teorijā.

Darba mērķis ir atrast jaunus kvantu spēļu piemērus un metodes to analīzei. Lai šo mērķi sasniegtu darbā tiek pētītas divas konkrētas spēles, Ardehali spēle [6] un EQUAL-EQUAL spēle, kas vispārina Almeida et al. [7] rakstā pētīto spēli. Tāpat tiek sniegti rezultāti par nejaušo simetrisko spēļu klasi. Šīs trīs tēmas, kopā ar problēmas aprakstu, veido četras darba daļas. Ardehali spēles analīze ir iesniegta publicēšanai žurnālā "Theoretical Computer Science".

Lai veiktu spēļu analīzi tiek izmantotas kombinatorikas, lineārās algebras un varbūtību teorijas metodes. Hipotēžu izvirzīšanai un pārbaudei tiek lietotas eksperimentālās matemātikas metodes.

Darba pilnvērtīgai lietošanai ir vēlamas priekšzināšanas lineārajā algebrā, varbūtību teorijā un kvantu skaitļošanā bakalaura kursu apjomā, tomēr lielu daļu darba iespējams pilnvērtīgi uztvert arī bez tām, vai arī nezināmās lietas uztverot par "melno kasti". Diemžēl vairums faktoloģiskā materiāla par kvantu spēlēm ir sastopams zinātnisko rakstu veidā un par tām trūkst vienota apkopojuma; tāpat šis darbs ir vienīgais autoram zināmais darbs latviešu valodā, kura galvenā tēma būtu tieši kvantu spēles.

1. nodaļa

Problēmas pamatnostādne un literatūras apskats

1.1 Problēmas pamatnostādne

Vispirms dosim galvenā objekta – divu spēlētāju nelokālas kooperatīvas spēles – definīciju, kas atbilst, piemēram, Cleve et al. rakstā [8] apskatītajai:

Definīcija 1. *Ja* S, T, A, B *ir netukšas kopas un* π *ir varbūtību sadalījums pār* $S \times T$ *un* V *ir predikāts pār* $S \times T \times A \times B$*, tad kortežs* (S, T, A, B, V, π) *definē divu spēlētāju* ***nelokālu kooperatīvu spēli****, kura tiek spēlēta šādi:*

- *tiesnesis atbilstoši varbūtību sadalījumam* π *izvēlas jautājumu pāri* $(s, t) \in S \times T$*,* s *paziņojot pirmajam spēlētājam, bet* t *– otrajam spēlētājam,*
- *spēlētājiem nav atļauts sazināties, bet ir atļauts pirms jautājumu saņemšanas vienoties par stratēģiju,*
- *pirmais spēlētājs tiesnesim paziņo savu atbildi* $a \in A$*, bet otrais spēlētājs – savu atbildi* $b \in B$*,*
- *spēlētāji uzvar, ja izpildās* $V(s, t, a, b)$*, pretējā gadījumā spēlētāji zaudē.*

Šajā definīcijā minētās S un T turpmāk sauksim par spēlētāju ievadu kopām, bet A un B – par spēlētāju izvadu kopām.

Šāda spēle tiek saukta par kooperatīvu, jo spēlētāju mērķis ir kopīgi uzvarēt tiesnesi, nevis katram iegūt maksimālu individuālu labumu. Spēle tiek saukta par nelokālu, jo spēlētāji potenciāli var atrasties tik tālu (piemēram, vairāku gaismas gadu attālumā), ka komunikācija starp tiem ir neiespējama. Piebildīsim, ka spēles definīciju var viegli vispārināt lielākam spēlētāju skaitam.

Definīcija 2. *Ja* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *un* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ir netukšas kopas un* π *ir varbūtību sadalījums pār* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ *un* V *ir predikāts pār* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \times A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$*,* *tad kortežs* $(S_1, S_2, \ldots, S_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, V, \pi)$ *definē* n *spēlētāju* ***nelokālu kooperatīvu spēli****, kura tiek spēlēta šādi:*

- *tiesnesis atbilstoši varbūtību sadalījumam* π *izvēlas jautājumu* n*-kortežu* $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$*,* s_i *paziņojot* i*-tajam spēlētājam,*
- *spēlētājiem nav atļauts sazināties, bet ir atļauts pirms jautājumu saņemšanas vienoties par stratēģiju,*
- *katrs spēlētājs tiesnesim paziņo savu atbildi,* $i-\text{tais}$ *spēlētājs tādējādi paziņo* $a_i \in A_i$*,*
- *spēlētāji uzvar, ja izpildās* $V(s_1, s_2, \ldots, s_n, a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, pretējā gadījumā spēlētāji zaudē.*

Lai labāk ilustrētu spēļu būtību, aplūkosim ievadā minēto CHSH spēli, fakti par kuras analīzi mums būs noderīgi arī vēlāk:

Piemērs 1. *Par* ***CHSH spēli*** *sauksim šādu divu spēlētāju spēli:*

- *katrs no spēlētājiem saņem vienu bitu,* 0 *vai* 1*, pie tam katru no* x_1x_2 *komplektiem* $00, 01, 10, 11$ *tiesnesis izvēlās ar vienādu varbūtību,*
- *katrs no spēlētājiem atbildē dod vienu bitu,* 0 *vai* 1*,*
- *spēlētāji uzvar, ja spēlētāju ievadiem* x_1, x_2 *un izvadiem* y_1, y_2 *izpildās šāda īpašība:*

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (x_1 \wedge x_2) = (y_1 \oplus y_2)$$

□

Labākai izpratnei varam tiesneša dotos ievaddatus un spēlētāju pieļaujamos izvaddatu pārus (pareizās atbildes) apkopot 1.1. tabulā.

x_1	x_2	Iespējamās pareizās atbildes y_1y_2
0	0	00 vai 11
0	1	00 vai 11
1	0	00 vai 11
1	1	01 vai 10

Tabula 1.1: CHSH spēli definējošā ievadu/izvadu tabula

Varam teikt arī formālāk: 2. definīcijas izpratnē šī ir divu spēlētāju nelokāla kooperatīva spēle, kurai $A = B = S = T = \{0, 1\}$, π ir vienmērīgais varbūtību sadalījums pār $S \times T$ un predikāts V ir definēts tā, kā parādīts 1.1. tabulā.

Kvantu stratēģija ļauj spēlētājiem lietot kopīgu **kvantu stāvokli**, kamēr **klasiskā stratēģija** ļauj izmantot tikai kopīgus gadījuma bitus. Līdzīgi par **kvantu spēli** tiek uzskatīta jebkura spēle, kurā spēlētājiem var būt kvantu stratēģija.

Galvenā problēma kvantu spēļu analīzē ir noskaidrot spēles uzvaras varbūtību klasiskajām un kvantu stratēģijām un noskaidrot pašas stratēģijas, kas šo varbūtību sasniedz.

Parasti (piemēram, rakstos [8], [7]) tiek pieņemts, ka π ir vienmērīgais sadalījums, tomēr var būt dabiski apskatīt arī citu sadalījumu. Ja ievaddatu sadalījums ir zināms, tad varam analizēt tikai determinētās stratēģijas, jo ir spēkā šāds rezultāts:

Apgalvojums 1. *Ja fiksētam varbūtību sadalījumam spēlētājiem eksistē varbūtiska stratēģija, kas spēlē ļauj sasniegt uzvaras varbūtību p, tad eksistē arī determinēta stratēģija, kas ļauj sasniegt šo pašu uzvaras varbūtību.*

Pierādījums. Spēlētāju varbūtiskā stratēģija ir varbūtiska kombinācija no determinētām stratēģijām D_1, D_2, ..., D_k, kur katrai determinētai stratēģijai ir piekārtota tās lietošanas varbūtība (i-tajai stratēģijai – p_i).

Ar X_i apzīmēsim gadījumlielumu, kas pieņem vērtību 1, ja D_i stratēģija dotajam ievaddatu pārim dod pareizu atbildi un 0, ja nepareizu. Saprotams, ka šādos apzīmējumos $E[X_i]$ ir uzvaras varbūtība lietojot D_i.

Līdzīgu gadījumlielumu X varam definēt spēlētāju varbūtiskajai stratēģijai, tad: $X = \sum_{i=1}^{k} p_i X_i$ un tāpēc $E[X] = E[\sum_{i=1}^{k} p_i X_i]$. Vidējās vērtības linearitātes dēļ: $E[X] = \sum_{i=1}^{k} p_i E[X_i]$ un varam secināt, ka ir tāds j, ka $E[X_j] \geqslant p$. Patiešām: ja tāda j nebūtu, tad visiem i izpildītos $E[X_i] < p$ un saskaitot visas šādas nevienādības mēs iegūtu pretrunu ar pieņēmumu par varbūtiskās stratēģijas uzvaras varbūtību: $E[X] < p$. $\square$

1.2 CHSH spēles klasisko stratēģiju analīze

Vispirms apskatīsim tikko piemērā dotās spēles klasisko gadījumu. Pieņemsim, ka spēlētāji rīkojas determinēti, un tāpēc pirmā spēlētāja atbildes var aprakstīt ar funkciju $y_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$, bet otrā spēlētāja atbildes — ar funkciju $y_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}$.

Aplūkosim `XOR` no spēlētāju atbilžu `XOR`, pār visiem četriem dažādajiem iespējamiem ievaddatu pāriem:

$$(y_1(0) \oplus y_2(0)) \oplus (y_1(0) \oplus y_2(1)) \oplus (y_1(1) \oplus y_2(0)) \oplus (y_1(1) \oplus y_2(1)) = 0$$

Pieņemsim, ka spēlētāji nekad nekļūdās, tad no predikāta f definīcijas seko, ka katru no $y_1(i) \oplus y_2(j)$ varam aizstāt ar $i \wedge j$, iegūstot:

$$(0 \wedge 0) \oplus (0 \wedge 1) \oplus (1 \wedge 0) \oplus (1 \wedge 1) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

Skaidrs, ka $0 \neq 1$, tāpēc šāda situācija nav iespējama un mūsu pieņēmums par spēlētāju nekļūdīgumu ir bijis nepareizs. Tātad spēlētāju stratēģija vismaz vienam ievaddatu pārim kļūdās, tāpēc uzvaras varbūtība nevar pārsniegt $3/4 = 0.75$. Varam ievērot ka šāda uzvaras varbūtība ir arī sasniedzama ar stratēģiju $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = 1$; lietojot to spēlētāji uzvarēs visiem ievaddatu pāriem, izņemot pāri $(1, 1)$.

Tomēr kvantu stratēģija ļauj iegūt lielāku uzvaras varbūtību $\approx 0.85 > 0.75$. Lai to parādītu mums būs nepieciešams izmantot rezultātu, kas ļauj problēmas par kvantu stratēģijām pārvērst par lineārās algebras problēmām.

1.3 Tsirelson redukcija kvantu spēļu analīzei

Lai pierādītu novērtējumus par kvantu stratēģijām, mums noderēs teorēma par ierobežotu spēļu klasi – XOR spēlēm [8, 9].

Definīcija 3. *Par **XOR spēli** sauc tādu n spēlētāju spēli ar bināriem izvadiem, kurai spēlētāju uzvaras predikāts katram spēlētāju ievadu kortežam $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pieļauj tieši vienu spēlētāju izvadu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ XOR vērtību:*

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \oplus_{i=1}^{n} x_i = \nu_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

Definīcija 4. *Par divu spēlētāju **XOR spēles**, kur pirmajam spēlētājam ir n iespējami ievadi $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un otrajam spēlētājam ir m iespējami ievadi $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$, **matricu** sauc matricu $C = \{c_{i,j}\}_{n,m}$, ko definē šādi:*

$$c_{i,j} \stackrel{\text{def}}{\equiv} (-1)^{\nu_{(s_i, t_j)}} \pi((s_i, t_j))$$

Piemērs 2. *CHSH spēle ir divu spēlētāju XOR spēle un tās spēles matrica ir:*

$$C = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Patiešām - tā kā π ir vienmērīgais sadalījums, tad visu matricas elementu absolūtās vērtības ir $1/4$ un pozitīvie matricas elementi atbilst tiem ievaddatu pāriem, kuriem spēlētājiem ir jāizdod vienādas atbildes.

Tagad varam noformulēt pašu Tsirelson teorēmu:

Teorēma 2 (Tsirelson)**.** *Jebkurai divu spēlētāju XOR spēlei, kurai $|S| = |T| = n$ šādi divi apgalvojumi ir ekvivalenti:*

- *eksistē tādi $2n$ reāli vienības vektori $u_1, \ldots, u_n \in R^n$ un $v_1, \ldots, v_n \in R^n$, ka spēles matricai C izpildās:*
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \langle u_i, v_j \rangle = p$$
- *spēlētājiem eksistē kvantu stratēģija, kurai uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība ir vienāda ar p*

Tsirelson teorēma un no tās iegūtie rezultāti būs svarīgs instruments kvantu stratēģiju novērtēšanā, jo tā katrai XOR spēlei ļauj kvantu stratēģijas eksistencei nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus pārrakstīt lineārās algebras valodā.

Matricu formā varam analizēt arī klasiskās stratēģijas, jo ir spēkā šāda teorēma:

Teorēma 3. *Jebkurai divu spēlētāju XOR spēlei, kurai* $|S| = |T| = n$ *šādi divi apgalvojumi ir ekvivalenti:*

- *eksistē tādi* $2n$ *skaitļi* $u_1, \ldots, u_n \in \{-1, 1\}$ *un* $v_1, \ldots, v_n \in \{-1, 1\}$*, ka spēles matricai* C *izpildās:*
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} u_i v_j = p$$
- *spēlētājiem eksistē determinēta stratēģija, kurai uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība ir vienāda ar* p

Pierādījums. Interpretēsim u_i un v_j šādi: $u_i = 1$ atbildīs pirmā spēlētāja stratēģijai saņemot ievadā s_i dot atbildi 1, $u_i = -1$ atbildīs pirmā spēlētāja stratēģijai saņemot ievadā s_i dot atbildi 0. Analogi interpretēsim v_j vērtības no tās iegūstot otrā spēlētāja stratēģiju.

Varam redzēt, ka izteiksmes $c_{i,j} u_i v_j$ vērtība ir vienāda ar $\pi(s_i, t_j)$, ja šāda stratēģija ievaddatu pārim (s_i, t_j) dod pareizu atbildi un ar $-\pi(s_i, t_j)$, ja atbilde ir nepareiza. Sasummējot šādas izteiksmes pa visām i un j vērtībām iegūstam visas atsevišķo uzvaru varbūtības ar "plus" zīmēm un visas atsevišķo zaudējumu varbūtības ar "mīnus" zīmēm. Tas arī pierāda prasīto. □

Vēl tikai atzīmēsim, ka lai pārietu no uzvaras varbūtības mīnus zaudējumu varbūtības, t.i. $p_w - p_l$, uz uzvaras varbūtību, varam ievērot, ka $p_w + p_l = 1$ un tālab $p_w = \frac{1}{2}(1 + (p_w - p_l))$.

1.4 CHSH spēles kvantu stratēģiju analīze

Izmantojot Tsirelson teorēmu mums pietiek apskatīt šādu matricu:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

un atrast izteiksmes

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{i,j} \langle u_i, v_j \rangle \tag{1.1}$$

maksimālo vērtību, kur u_1, u_2, v_1, v_2 – reāli divdimensiju vienības vektori.

Pārveidosim maksimizējamo izteiksmi šādi: $\frac{1}{4}(\langle u_1, v_1 + v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 - v_2 \rangle)$ un ievērosim, ka $\langle u_1, v_1 + v_2 \rangle$ savu maksimālo vērtību sasniedz tad, ja u_1 un $v_1 + v_2$ ir perpendikulāri. Patiešām, tā kā $\langle u_1, v_1 + v_2 \rangle = \|u_1\| \cdot \|v_1 + v_2\| \cdot \cos \angle(u_1, v_1 + v_2)$, tad izteiksmes vērtība tiek maksimizēta tad, kad $\cos\angle(u_1, v_1 + v2) = 1$; tā kā $||u_1|| = 1$, tad $u_1 = \frac{v_1+v_2}{||v_1+v_2||}$ un $\langle u_1, v_1 + v_2\rangle = \langle \frac{v_1+v_2}{||v_1+v_2||}, v_1 + v_2\rangle = ||v_1 + v_2||$.

Līdzīgi spriežot par $\langle u_2, v_1 - v_2\rangle$ un ievērojot, ka maksimizācijas nosacījumi abām izteiksmēm ir neatkarīgi, pārveidojam maksimizējamo izteiksmi šādi:

$$\frac{1}{4}(||v_1 + v_2|| + ||v_1 - v_2||) \tag{1.2}$$

Pagriezīsim v_1 un v_2 tā, ka v_1 kļūst par vienības vektoru $(1, 0)$ un ievērosim, ka šāda pagriešana izteiksmes 1.2 vērtību nemaina. Tā kā v_2 ir vienības vektors, tad $v_2 = (\cos x, \sin x)$ kaut kādam x. Pārrakstīsim šo izteiksmi ar tikko izdarītajiem vienkāršojumiem:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} + \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}) = \tag{1.3}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2 + 2\cos x} + \sqrt{2 - 2\cos x}) \tag{1.4}$$

Varam ievērot, ka šīs izteiksmes vērtība sasniedz maksimālo vērtību tad, kad to sasniedz izteiksmes $(\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x})^2$ vērtība:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x})^2 = \\
&= 1 + \cos x + 2\sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 - \cos x = \\
&= 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 x}
\end{aligned}$$

kas savu maksimālo vērtību sasniedz tad, kad $x = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Ievietojot šo x izteiksmē 1.4 iegūstam, ka 1.1 maksimālā vērtība ir $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tikko iegūtā vērtība ir "uzvaras varbūtība" mīnus "zaudējuma varbūtība", tāpēc pati uzvaras varbūtība ir $\frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85$.

Lai gan vēlāk mēs izmantosim tikai Tsirelson ekvivalenci un precīzās kvantu stratēģijas īpaši neizrakstīsim, tomēr pilnīguma dēļ CHSH spēlei dosim arī precīzu kvantu stratēģiju, kas realizē šo uzvaras varbūtību [10]. Ar $|\phi_0(\theta)\rangle$ sapratīsim kvantu stāvokli $\cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ un ar $|\phi_1(\theta)\rangle$ sapratīsim kvantu stāvokli $-\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$.

1. pirms savu bitu saņemšanas spēlētāji sagatavo kvantu stāvokli $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$, kura pirmais kubits atrodas pie pirmā spēlētāja, bet otrais kubits – pie otrā spēlētāja,

2. ja pirmais spēlētājs saņēma 0, tad viņš savu kubitu mēra bāzē $\{|\phi_0(0)\rangle, |\phi_1(0)\rangle\}$, pretējā gadījumā bāzē $\{|\phi_0(\pi/4)\rangle, |\phi_1(\pi/4)\rangle\}$,

3. ja otrais spēlētājs saņēma 0, tad viņš savu kubitu mēra bāzē $\{|\phi_0(\pi/8)\rangle, |\phi_1(\pi/8)\rangle\}$, pretējā gadījumā bāzē $\{|\phi_0(-\pi/8)\rangle, |\phi_1(-\pi/8)\rangle\}$,

4. katrs no spēlētājiem kā savu atbildi paziņo 0 vai 1, atkarībā no tā, kuru no bāzes vektoriem (pirmo vai otro) viņš ieguva kā mērījuma rezultātu.

Var pierādīt, ka katram ievaddatu pārim stratēģija uzvar ar varbūtību $\cos^2(\pi/8) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, kas sakrīt ar tikko iegūto augšējo novērtējumu. Šeit to izdarīsim pārim $(0, 0)$, pārējie gadījumi ir analogi.

No kvantu skaitļošanas zināms, ka divu mērījumu, starp kuriem nav citu transformāciju, secība nav svarīga, tāpēc varam pieņemt, ka pirmais savu mērījumu izdara pirmais spēlētājs. Mērot $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ bāzē $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ar varbūtību $\frac{1}{2}$ tiek iegūts rezultāts $|0\rangle$ un stāvoklis nokolapsē uz $|00\rangle$, un ar varbūtību $\frac{1}{2}$ tiek iegūts rezultāts $|1\rangle$ un stāvoklis nokolapsē uz $|11\rangle$.

Otrajam spēlētājam, mērot bāzē $\{|\phi_0(\pi/8)\rangle, |\phi_1(\pi/8)\rangle\}$ stāvokli $|0\rangle$ varbūtība iegūt $|\phi_0(\pi/8)\rangle$ ir vienāda ar $\langle\phi_0(\pi/8)|0\rangle = \cos^2(\pi/8)$. Mērot stāvokli $|1\rangle$ varbūtība iegūt $|\phi_1(\pi/8)\rangle$ ir vienāda ar $\langle\phi_1(\pi/8)|1\rangle = \cos^2(\pi/8)$.

Varam secināt, ka pareizā rezultāta varbūtība ir $\frac{1}{2}\cos^2(\pi/8) + \frac{1}{2}\cos^2(\pi/8) = \cos^2(\pi/8)$.

1.5 Apsvērumi par ievaddatu sadalījumu

Pieņēmums par π kā vienmērīgu sadalījumu ir simetrisks, dabisks un viegli analizējams. Šāds pieņēmums sevī ietver tiesneša neitralitāti pret spēlētājiem. Tomēr var gadīties, ka tiesnesis ir nevis spēlētājiem neitrāls, bet gan nedraudzīgs (t.i. cenšas minimizēt spēlētāju uzvaras varbūtību), un tādā gadījumā pieņēmums, ka π ir vienmērīgs sadalījums, ne obligāti ir korekts.

Tādējādi ir dabiski runāt, ne tikai par "average-case" sadalījumu, bet arī par "worst-case" sadalījumu spēlētājiem, t.i. tādu sadalījumu, kas tiem nodrošina viszemāko uzvaras varbūtību. Ideja par "worst-case" sadalījuma analīzi pieder profesoriem Rūsiņam Freivaldam un Jurim Smotrovam, bet publicētu "worst-case" analīžu rezultāti autoram nav zināmi.

Atcerēsimies, ka 1. apgalvojums mums ļauj pieņemt, ka katram fiksētam varbūtību sadalījumam optimālā stratēģija ir determinēta. Tomēr kvantu spēles varam analizēt arī tādā modelī, kurā varbūtību sadalījums π spēlētājiem iepriekš nav zināms. Tādā gadījumā līdzīgs apgalvojums vairs nav spēkā un ir nepieciešams analizēt varbūtiskas stratēģijas. To intuitīvi pamatot varam šādi: pat ja katram konkrētam varbūtību sadalījumam ir laba determinētā stratēģija, tad nav obligāti jābūt tā, ka viena determinētā stratēģija der visiem varbūtību sadalījumiem.

Precīzu šī fakta pierādījumu dosim analizējot EQUAL-EQUAL spēli, kurai pierādīsim, ka eksistē varbūtiska stratēģija, kas katram varbūtību sadaījumam sasniedz uzvaras varbūtību 2/3, bet katrai determinētai stratēģijai eksistē varbūtību sadalījums, kuram uzvaras varbūtība lietojot šo stratēģiju ir 0.

2. nodaļa

Ardehali spēles analīze

2.1 Spēles apraksts un motivācija

Šajā nodaļā aprakstīsim Ardehali spēles analīzi. Autora nopelns ir šeit esošā klasisko stratēģiju analīze; kvantu stratēģiju analīzi veica viņa kolēģi. Dažus rezultātus no mūsu kopīgā raksta [11] par spēļu ekvivalenci (6. un 7. teorēmu) vispirms tika ieguvis Dmitrijs Kravčenko, bet pierādot 8. teorēmu autors tos atklāja neatkarīgi.

Definīcija 5. *Par **Ardehali spēli** sauksim* n *spēlētāju spēli ar bināriem ievadiem* a_1*,* a_2*, …,* $a_n \in \{0,1\}$ *un bināriem izvadiem* x_1*,* x_2*, …,* $x_n \in \{0,1\}$*, kurai spēlētāju uzvaras predikāts* V *ir šāds:*

$$V(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} \oplus_{i=1}^{n} x_i = 1 & \textit{ja } a_1+\ldots+a_n \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \oplus_{i=1}^{n} x_i = 0 & \textit{ja } a_1+\ldots+a_n \equiv 0,1 \pmod 4 \end{cases}$$

Ardehali spēle pirmo reizi tika analizēta paša M. Ardehali rakstā [6], kurā tā tika iegūta. Ardehali raksts bija pirmais, kas parādīja eksponenciāli lielāku uzvaras varbūtību nobīdi visur definētai spēlei. Kā vēlāk pierādīsim, tad Ardehali spēles kvantu stratēģiju uzvaras varbūtība ir $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, bet klasiskā – tikai $\frac{1}{2}+2^{-\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}$ un patiešām nobīdes no $\frac{1}{2}$ ir eksponenciāli saistītas.

Pirms tam Mermins savā rakstā [12] parādīja eksponeciāli lielāku nobīdi daļēji definētai spēlei, t.i., tāda, kurai spēlētājiem dažiem ievadiem visas atbildes ir pareizas.

Šeit mēs piedāvājam jaunu analīzes veidu, kas ievērojami atšķiras no iepriekš iegūtās. Tāpat mēs uzskatām, ka mūsu metodes ir ievērojami vispārīgākas un tādējādi daudz labāk der citām simetriskām spēlēm, kamēr oriģinālās analīzes [6] spriedumi ir viennozīmīgi piemēroti konkrētajai spēlei.

2.2 Klasisko stratēģiju analīze

Vispirms atzīmēsim, ka katram individuālam spēlētājam ir tieši četras iespējamās stratēģijas:

1. neatkarīgi no ievada vienmēr atbildēt “0”; šo stratēģiju sauksim par (00),
2. atbildēt to pašu, kas saņemts ievadā; šo stratēģiju sauksim par (01),
3. atbildēt pretējo bitu tam, kas saņemts ievadā; šo stratēģiju sauksim par (10),
4. neatkarīgi no ievada vienmēr atbildēt “1”; šo stratēģiju sauksim par (11).

Tā kā aplūkojamā spēle ir simetriska un katrs no ievadiem ir vienlīdz varbūtisks, tad nav svarīgi kā augstāk minētās individuālās stratēģijas izkārtotas pa spēlētājiem, bet ir svarīgi cik spēlētāji lietu kuru stratēģiju.

Pieņemsim, ka spēlētāju kopējo stratēģiju veido a individuālās stratēģijas (00), b individuālās stratēģijas (01), c individuālās stratēģijas (10) un d individuālās stratēģijas (11). Šādu kopējo stratēģiju unikāli raksturo četrinieks (a, b, c, d).

Pierādīsim šādas divas teorēmas par spēlētāju stratēģijām:

Teorēma 4. *Ja divi spēlētāji vienlaicīgi maina savu stratēģiju uz pretējo (t.i.* (00) *uz* (11) *vai otrādi un* (01) *uz* (10) *vai otrādi), tad kopējās stratēģijas uzvaras varbūtība nemainās.*

Pierādījums. Patiešām, katram no iespējamiem šo divu spēlētāju ievadiem, to izvadu XOR ir neatkarīgs no tā, vai abi spēlētāji lieto oriģinālās vai pretējās stratēģijas, jo $x \oplus y = \neg x \oplus \neg y$. Tātad arī tiesnesis rēķinot visu spēlētāju atbilžu XOR nespēs atšķirt, kuras stratēģijas — oriģinālās vai pretējās — lieto šie abi spēlētāji, tāpēc kopējās stratēģijas uzvaras varbūtība nemainās. □

Teorēma 5. *Ja abos pāra četriniekos visi elementi ir nenegatīvi, tad šādi stratēģiju pāri ir ekvivalenti:*

1. (a, b, c, d) *un* $(a-2, b, c, d+2)$, *resp.,* (a, b, c, d) *un* $(a+2, b, c, d-2)$
2. (a, b, c, d) *un* $(a, b-2, c+2, d)$, *resp.,* (a, b, c, d) *un* $(a, b+2, c-2, d)$
3. (a, b, c, d) *un* $(a-1, b-1, c+1, d+1)$, *resp.,* (a, b, c, d) *un* $(a+1, b+1, c-1, d-1)$
4. (a, b, c, d) *un* $(a-1, b+1, c-1, d+1)$, *resp.,* (a, b, c, d) *un* $(a+1, b-1, c+1, d-1)$

Pierādījums. Pierādījums seko no 4. teorēmas. Pirmajā redukcijā divi spēlētāji stratēģiju (00), resp., (11) maina pret (11), resp., (00). Trešajā redukcijā viens spēlētājs stratēģiju (00), resp., (11) maina pret (11), resp., (00) un viens spēlētājs (01), resp., (10) pret (10), resp., (01). Abas atlikušās redukcijas pierāda identiski. □

Tagad varam pierādīt šādu teorēmu par klasisko stratēģiju ekvivalenci:

Teorēma 6. *Katru no stratēģijām* (a, b, c, d) *var reducēt uz kādu no šādām* $2n+2$ *stratēģijām:* $(0, n, 0, 0)$, $(1, n-1, 0, 0)$, *...,* $(n, 0, 0, 0)$ *vai* $(0, n-1, 1, 0)$, $(1, n-2, 1, 0)$, *...,* $(n-1, 0, 1, 0)$ *vai* $(n-1, 0, 0, 1)$.

Pierādījums. Izmantojot 5. teorēmu, varam stratēģiju reducēt uz kādu no $(x, y, 0, z)$ vai $(x, y, z, 0)$ daudzkārtīgi pielietojot 3. redukciju. Tālāk vairākkārtīgi pielietojot 1., resp. 2. redukciju varam stratēģiju reducēt uz kādu no $(x', y', 0, 0)$, $(x', y', 1, 0)$, vai $(x', y', 0, 1)$. Pirmās divas no šīm jau ir teorēmā prasītajā formā. Ja ir atlikušais gadījums – $(x', y', 0, 1)$, tad ir divas iespējas: ja $y' = 0$, tad $x' = n - 1$ un stratēģija ir teorēmā prasītajā formā, pretējā gadījumā $y' \geqslant 1$ un varam lietot 4. redukciju, lai iegūtu stratēģiju $(x'+1, y'-1, 1, 0)$ teorēmā prasītajā formā. □

Šie rezultāti ir spēkā jebkurai simetriskai XOR spēlei un tos izmantosim arī nejaušu simetrisku spēļu analīzē vēlāk.

Tomēr Ardehali spēlei stratēģiju kopu varam samazināt vēl vairāk un pierādīt, ka spēlētājiem potenciāli ir tikai četras dažādas kopējās stratēģijas:

Teorēma 7. *Katra no stratēģijām* (a, b, c, d) *ir ekvivalenta kādai no šādām četrām stratēģijām:* $(n, 0, 0, 0)$*,* $(n-1, 1, 0, 0)$*,* $(n-1, 0, 1, 0)$ *vai* $(n-1, 0, 0, 1)$.

Pierādījums. Pierādīsim, ka Ardehali spēlei ir iespējama šādas redukcijas: $(a, b, c, d) \to (a+1, b-2, c, d+1)$ un $(a, b, c, d) \to (a+1, b, c-2, d+1)$. Ja tas būtu izdarīts, tad jebkuru no 6. teorēmas stratēģijām varētu pārvērst par tādu (a, b, c, d), kam $b, c \leqslant 1$ (pielietojot vienu vai otru līdz kamēr $b, c \leqslant 1$). Tālāk ar 1. redukciju no 5. teorēmas redukcijām stratēģiju varētu pārvērst par tādu, kam $b, c, d \leqslant 1$ (kamēr iespējams samazinot d par 2 un palielinot a par 2).

Ja $b, c, d \leqslant 1$, tad ir iespējami 8 gadījumi atkarībā no tā, cik no b, c, d ir 1. Ja ne vairāk kā viens, tad stratēģija jau ir prasītajā formā. Aplūkosim pārējos gadījumus. Katrai no stratēģijām $(n-2, 0, 1, 1)$, $(n-2, 1, 0, 1)$, $(n-2, 1, 1, 0)$ pietiek ar vienu no 5. teorēmas redukcijām, savukārt $(n-3, 1, 1, 1)$ var reducēt divos soļos – vispirms par $(n-2, 0, 0, 2)$ un pēc tam par $(n, 0, 0, 0)$.

Pierādīsim pirmo no minētajām redukcijām ($(a, b, c, d) \to (a+1, b-2, c, d+1)$), otrās pierādījums ir simetrisks. Piefiksēsim $n-2$ spēlētāju ievadus, t.i. visu spēlētāju izņemot divu ar stratēģijām (01) un (01) un izdarīsim redukciju, t.i., nomainīsim šo spēlētāju stratēģijas uz (00) un (11). Tālāk aplūkosim šādu tabulu, kas raksturo četras iespējamos spēles ievadus šiem diviem spēlētājiem:

Ievadi	(01)	(01)	(00)	(11)	Rezultāts
0,0	0	0	0	1	pareizs $\to$ nepareizs vai otrādi
0,1	0	1	0	1	XOR nemainās
1,0	1	0	0	1	XOR nemainās
1,1	1	1	0	1	nepareizs $\to$ pareizs vai otrādi

Tabula 2.1: Stratēģiju rezultāti pirms un pēc redukcijas

Ievērosim, ka divos gadījumos no četriem tiesnesis nespēs atšķirt vai redukcija ir notikusi vai nav, jo spēlētāju izvadu XOR nemainās. Par atlikušajiem diviem gadījumiem spriedīsim šādi: ja spēlētāju atbilde bija pareiza ievadpārim $(0, 0)$, tad tā nevar būt pareiza ievadpārim $(1,1)$ (un otrādi), jo spēlētāji dod vienādu XOR bet ievada Haminga svars atšķiras tieši par divi (savukārt Ardehali spēlei ievadiem ar Haminga svara atšķirību 2 ir jādod dažādi rezultāti). Tāpēc pēc redukcijas viena no atbildēm no nepareizās būs kļuvusi par pareizo, bet otra – no pareizās pare nepareizo. Tātad kopējais pareizo un nepareizo atbilžu skaits nav mainījies un šāda redukcija patiešām ir pieļaujama. □

Tagad varam pierādīt galveno teorēmu par klasiskajām stratēģijām Ardehali spēlei:

Teorēma 8. *Ardehali spēles uzvaras varbūtība, lietojot klasisku stratēģiju, ir* $\frac{1}{2} + 2^{-\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$.

Pierādījums. Ar $f(n, 01)$ apzīmēsim tādu ievaddatu komplektu $a_1 a_2 \cdots a_n$ skaitu, kuriem n spēlētāju Ardehali spēlē stratēģija $(n-1, 1, 0, 0)$ dod pareizu atbildi. Līdzīgi definēsim f vērtību arī priekš $f(n, 00)$ (stratēģija $(n, 0, 0, 0)$), $f(n, 10)$ (stratēģija $(n-1, 0, 1, 0)$) un $f(n, 11)$ (stratēģija $(n-1, 0, 0, 1)$).

Savā pierādījumā mēs vairākkārt izmantosim šādus divus elementārus faktus:

- $\binom{n}{k} = 0$, ja k pārsniedz n vai arī ir mazāks par nulli,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, kas ir spēkā jebkuriem n un k, tai skaitā $k < 0$ vai $k > n$.

Aprēķināsim $f(n, 00)$. Šīs stratēģijas rezultāts vienmēr dod `XOR`, kas vienāds ar nulli, tamdēļ $f(n, 00)$ pēc definīcijas ir vienāds ar to n bitu virknīšu skaitu, kam Haminga svars ir 0 vai 1 pēc moduļa no 4. Saskaitot pāri visiem šādiem Haminga svariem mēs iegūstam: $f(n, 00) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} + \binom{n}{4k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{4k+1}$. Pirmā elementārā fakta dēļ summa ir ierobežota, t.i. tikai galīgs skaits saskaitāmo nav nulle; šis bezgalīgo summu pieraksts mums būs ļoti ērts vēlāk.

Varam sanumurēt spēlētājus tā, ka stratēģija $f(n, 01)$ vienmēr dos `XOR`, kas vienāds ar pēdējo ievada bitu a_n (t.i. pirmajiem $n-1$ spēlētājiem lietojot stratēģiju (00), bet n-tajam spēlētājam – (01)). Šķirosim divus gadījumus

- ja šis pēdējais bits ir nulle, tad lai stratēģija dotu pareizu `XOR`, visu pārējo bitu Haminga svaram ir jābūt 0 vai $1 \pmod 4$. Varam saskaitīt, ka ir tieši $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{4k} + \binom{n-1}{4k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+1}$ šādu ievadu,
- ja šis pēdējais bits ir viens, tad lai stratēģija dotu pareizu `XOR`, visu pārējo bitu Haminga svaram ir jābūt 1 vai $2 \pmod 4$. Varam saskaitīt, ka ir tieši $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{4k+1} + \binom{n-1}{4k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+2}$ šādu ievadu.

Tātad kopējais uzvarošo ievadu skaits šai stratēģijai ir $f(n, 01) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{4k+2}$.

Līdzīgi analizējot atlikušos divus gadījumus mēs iegūstam $f(n, 10) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{4k}$ un $f(n, 11) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{4k+3}$.

Ievērosim, ka funkcijas f vērtības ja $n = 1$ ir šādas: $f(1, 00) = 2$, $f(1, 01) = 1$, $f(1, 10) = 1$, $f(1, 11) = 0$. Tāpat ievērosim, ka otrā elementārā fakta dēļ jebkuram n ir

$n \pmod 8$	(00)	(01)	(10)	(11)
0	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$
1	$2^{\frac{n-1}{2}}+2^{n-1}$	2^{n-1}	2^{n-1}	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}$
2	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$
3	2^{n-1}	$2^{\frac{n-1}{2}}+2^{n-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}$	2^{n-1}
4	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$
5	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}$	2^{n-1}	2^{n-1}	$2^{\frac{n-1}{2}}+2^{n-1}$
6	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$	$2^{\frac{n}{2}-1}+2^{n-1}$
7	2^{n-1}	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}$	$2^{\frac{n-1}{2}}+2^{n-1}$	2^{n-1}

Tabula 2.2: Uzvarošo ievadu skaits atkarībā no spēlētāju skaita un stratēģijas

spēkā šādas vienādības: $f(n+1,00) = f(n,00) + f(n,10)$, $f(n+1,01) = f(n,01) + f(n,00)$, $f(n+1,10) = f(n,10) + f(n,11)$ and $f(n+1,11) = f(n,11) + f(n,01)$.

Tālāk varam lietot matemātisko indukciju, lai pierādītu, ka uzvarošo ievadu skaits katram n un katrai stratēģijai sakrīt ar tabulā 2.2 doto.

No tabulas redzams, ka katram n optimālajai stratēģijai ir $2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + 2^{n-1}$ uzvarošo ievadu, tamdēļ uzvaras varbūtība ir $\frac{1}{2} + 2^{-\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$. □

2.3 Rezultāti par kvantu stratēģijām un diskusija

Kvantu stratēģijas analīze ir aplūkota kopīgajā rakstā [11]; to šeit neatkārtosim, bet dosim galveno rezultātu:

Teorēma 9. *Ardehali spēlei ar n spēlētājiem eksistē kvantu stratēģija, kas sasniedz uzvaras varbūtību $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$, bet neeksistē kvantu stratēģija, kas sasniedz lielāku uzvaras varbūtību.*

Tādējādi ir pierādīts svarīgs fakts: Ardehali spēlei uzvaras varbūtības nobīde no $\frac{1}{2}$, ko vienmēr var sasniegt spēlētājiem dodot nejaušas atbildes, kvantu stratēģijām ir **eksponenciāli augstāka** nekā klasiskajām stratēģijām.

Autora veiktie datoreksperimenti pāri visām n spēlētāju simetriskajām spēlēm[1] ar mazu spēlētāju skaitu rāda šādus faktus:

- Ardehali spēlei (un tās variācijām) ir viszemākā klasisko stratēģiju uzvaras varbūtība,
- Ardehali spēlei (un tās variācijām) ir vislielākā atstarpe $\frac{\log(p_{quantum}-\frac{1}{2})}{\log(p_{classical}-\frac{1}{2})}$ starp klasisko stratēģiju uzvaras varbūtību un kvantu stratēģiju uzvaras varbūtību.

Ardehali raksts [6] bija pirmais, kas parādīja eksponenciāli lielāku nobīdi visur definētai spēlei, bet šie datoreksperimentu rezultāti ļauj izdarīt hipotēzi, ka šī nobīde arī ir maksimālā iespējamā.

[1]skat. 8. definīciju 4. nodaļā par nejaušām simetriskām spēlēm

Plašāki datoreksperimentu rezultāti, kas salīdzina simetriskas spēles savā starpā ir doti 4. nodaļā.

3. nodaļa

EQUAL-EQUAL spēles analīze

3.1 Spēles apraksts un motivācija

Šajā nodaļā tiks apskatīta Almeida et al. [7] rakstā pētītās spēles "n biti pa apli" vispārinājuma analīze. Visi šeit minētie rezultāti ir autora iegūti.

Pētītās spēles ideja pieder darba vadītājam un tā radās, mēģinot izdomāt nesamākslotu piemēru, kur "worst-case" uzvaras varbūtība atšķiras no "average-case" (vienmērīgā sadalījuma) uzvaras varbūtības. Visām populārākajām kvantu spēlēm, piemēram, CHSH spēlei, Ardehali spēlei [6], "n bitu pa apli" spēlei [7] un "magic square" spēlei [8], "worst-case" uzvaras varbūtība sakrīt ar "average-case" uzvaras varbūtību.

Definīcija 6. *Par **EQUAL-EQUAL spēli** sauksim divu spēlētāju spēli ar n ievadiem un bināriem izvadiem katram spēlētājam (t.i. $S, T = \{1, 2, \dots, n\}$ un $A, B = \{0, 1\}$, 2. definīcijas apzīmējumos), kurai spēlētāju uzvaras predikāts V ir šāds:*

$$V(s, t, a, b) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (s = t) \Leftrightarrow (a = b)$$

Atzīmēsim, ka šī spēle ir XOR spēle un tāpēc varam lietot Tsirelson teorēmu kvantu stratēģiju analīzei un tās klasisko stratēģiju analogu.

Šo spēli mēs pētīsim ne tikai ierastajā "average-case" modelī, bet arī "worst-case" modelī un patvaļīga varbūtību sadalījuma modelī. Mēs pierādīsim, ka gan kvantiski, gan klasiski spēli lieliem n nevar uzvarēt ar varbūtību, kas lielāka par $\frac{2}{3}$, bet varbūtību $\frac{2}{3}$ vienmēr var sasniegt.

3.2 Daži apsvērumi par varbūtību sadaījumiem

Labākai spēles izpratnei atzīmēsim šādu faktu par tās matricu:

Apgalvojums 10. *Šīs spēles matrica varbūtību sadalījumam π ir:*

$$A = \begin{pmatrix} \pi(1,1) & -\pi(1,2) & -\pi(1,3) & \dots & -\pi(1,n) \\ -\pi(2,1) & \pi(2,2) & -\pi(2,3) & \dots & -\pi(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\pi(n,1) & -\pi(n,2) & -\pi(n,3) & \dots & \pi(n,n) \end{pmatrix}$$

Mums vēlāk būs svarīgi "vienmērīgi" sadalījumi, t.i. tādi, kur $\pi(i,j)$ vērtība ir atkarīga tikai no i un j vienādības, nevis no konkrētām i, j vērtībām:

Definīcija 7. *Ja $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ un $n\alpha + (n^2 - n)\beta = 1$, tad par (α, β) vienmērīgu varbūtību sadalījumu EQUAL-EQUAL spēlei sauksim tādu varbūtību sadalījumu π, kam:*

$$\pi(i,j) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} \alpha & \textit{ja } i = j, \\ \beta & \textit{citādi} \end{cases}$$

Varam redzēt, ka α un β uzliktie nosacījumi patiešām π padara par labi definētu varbūtību sadalījumu.

Sekas 11. *EQUAL-EQUAL spēlei ar (α, β) vienmērīgu varbūtību sadalījumu spēles matrica ir:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ -\beta & \alpha & -\beta & \dots & -\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & -\beta & -\beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

No simetrijas apsvērumiem šķiet, ka sadalījumiem, kuri diferencē dažādus ievadus, t.i. nav (α, β) simetriski, vajadzētu būt labvēlīgām spēlētājiem un nederēt par "worst-case" sadalījumiem. Vēlāk pierādīsim, ka "worst-case" sadalījums patiešām ir (α, β) simetrisks.

Lai analizētu sadalījumus "worst-case" sadalījumu nezināmam varbūtību sadalījumam, atzīmēsim šādu rezultātu [13]:

Teorēma 12 (Yao princips)**.** *Varbūtiskas stratēģijas uzvaras varbūtība nezināmam "worst-case" sadalījumam nevar pārsniegt determinētas stratēģijas uzvaras varbūtību zināmam visgrūtākajam sadalījumam.*

3.3 Klasisko stratēģiju analīze

Vispirms pierādīsim, ka lielam spēlētāju skaitam labākā uzvaras varbūtība, ko iespējams sasniegt ar klasisku stratēģiju, ir $\frac{2}{3}$. Precīzāk, pierādīsim šādu rezultātu:

Teorēma 13. *Katram $\epsilon > 0$ eksistē tāds n_0, ka katrai $n \geqslant n_0$ spēlētāju EQUAL-EQUAL spēlei ir tāds varbūtību sadalījums π_n, ka neviena klasiska determinēta stratēģija pret šo varbūtību sadalījumu nevar sasniegt labāku uzvaras varbūtību par $\frac{2}{3} + \epsilon$.*

Pierādījums. Pierādīsim, ka par meklēto π_n der (α, β) vienmērīgs varbūtību sadalījums ar $\alpha = \frac{1}{3n}$ un $\beta = \frac{2}{3(n^2-n)}$, kur minimālo n vērtību n_0 noskaidrosim vēlāk; lasītājs var pārliecināties, ka šīm parametru vērtībām sadalījumam izpildās definīcijā uzliktie ierobežojumi.

Tālāk izmantosim 3. teorēmu par divu spēlētāju XOR spēļu klasiskajām stratēģijām un spriedīsim par atbilstošajiem u_i un v_i komplektiem.

Vispirms pamatosim, ka katrai v_i komplekta izvēlei, summas $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_iv_j$ maksimizējošo u_i izvēle ir viennozīmīgi noteikta.

Pārveidosim maksimizējamo summu šādā formā: $\sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$. Piefiksēsim v_i komplektu un $a_{i,j}$, tad iekšējo summu vērtības attiecībā pret u_i ir konstantas, tāpēc summas vērtību maksimizējošā stratēģija ir u_i izvēlēties tā, lai $u_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$ būtu nenegatīva. Šādi izvēloties u_i maksimizējamā summa pārvēršas par $\sum_i |\sum_j a_{i,j}v_j|$.

Tālāk pamanīsim, ka mūsu varbūtību sadalījuma simetrijas dēļ varam nerūpēties par to kā tieši $+1$ un -1 sadalās pa v_i – svarīgs ir tikai to skaits un pieņemsim, ka tieši k no v_i ir $+1$. Apskatīsim tās matricas rindas ar numuru i, kurām $v_i = 1$; tajās summa $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$ pārvēršas par $\alpha - (k-1)\beta + (n-k)\beta$. Līdzīgi rindām ar numuru i, kurām $v_i = -1$ summa $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$ pārvēršas par $-\alpha + (n-k-1)\beta - k\beta$. Tādējādi varam secināt, ka:

$$\sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j| =$$

$$= k|\alpha - (k-1)\beta + (n-k)\beta| + (n-k)|-\alpha + (n-k-1)\beta - k\beta| =$$

$$= k|\beta(n-2k) + (\alpha+\beta)| + (n-k)|\beta(n-2k) - (\alpha+\beta)|$$

Ievietojot šajā izteiksmē α un β precīzās vērtības vērtības pēc nelieliem algebriskiem pārveidojumiem iegūstam:

$$\frac{(n-k)|n-4k-1| + k|3n-4k+1|}{3n^2-3n}$$

Tālāk šķirosim trīs gadījumus, lai atbrīvotos no moduļiem:

1. ja $4k \leqslant n-1$, tad izteiksme pārvēršas par $\frac{n-2k}{3n}$, kas savu maksimumu $1/3$ sasniedz pie $k = 0$,

2. ja $4k \geqslant 3n+1$, tad izteiksme pārvēršas par $\frac{2k-n}{3n}$, kas savu maksimumu $1/3$ sasniedz pie $k = n$,

3. Ja $n-1 < 4k < 3n+1$, tad izteiksme pārvēršas par $\frac{8k(n-k)-(n^2-n)}{3n^2-3n}$. Tā kā šīs funkcijas divkāršais atvasinājums pēc k ir negatīvs, tad tā funkcija ir ieliekta pēc k un tā savu maksimumu sasniedz intervāla iekšienē un maksimuma punktā tās atvasinājums ir nulle. Šīs izteiksmes atvasinājums pēc k ir $\frac{8n-16k}{3n^2-3n}$, tāpēc tā savu maksimumu sasniedz, ja $k = n/2$ un izteiksmes vērtība šajā gadījumā ir $\frac{n+1}{3(n-1)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{n-1}$.

No 3. teorēmas seko, ka labākās determinētās stratēģijas uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība ir ierobežota no augšas ar $\frac{1}{3} + \frac{2}{n-1}$ (ja n ir pāra, tad meklētais $k = n/2$ der stratēģijas iegūšanai un ierobežojums ir precīzs). No tā seko, ka uzvaras varbūtība ir ierobežota no augšas ar $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{n-1}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{n-1}$ un par meklēto n_0 der $\frac{1+\epsilon}{\epsilon}$. □

Tālāk pierādīsim, ka uzvaras varbūtību $\frac{2}{3}$ var sasniegt jebkuram sadalījumam, arī tādiem, kas nav (α, β) vienmērīgi. Mēs pierādīsim daudz spēcīgāku apgalvojumu: arī spēlējot pret nezināmu varbūtību sadalījumu mēs vienmēr varam sasniegt uzvaras varbūtību $\frac{2}{3}$. Ja būsim pierādījuši to, tad labas determinētas stratēģijas eksistenci zināmam varbūtību sadalījumam varēsim izvest kā sekas no pierādītā un 1. apgalvojuma.

Teorēma 14. *Katram n eksistē tāda no varbūtību sadalījuma neatkarīga varbūtiska klasiska stratēģija, kas pret jebkuru no n spēlētāju spēles EQUAL-EQUAL varbūtību sadalījumiem sasniedz uzvaras varbūtību vismaz $\frac{2}{3}$.*

Pierādījums. Atkal lietosim Tsirelson teorēmas analogu klasisko stratēģiju analīzei. Par kādas spēlētāju stratēģijas, ko viennozīmīgi nosaka u_i un v_i korteži, inducēto plusiņu kopu mēs sauksim to matricas elementu kopu, kuriem noteikti jābūt nenegatīviem pēc šīs stratēģijas pielietošanas, t.i., tādu (i, j) kopu, ka $u_i v_j = 1$. Par plusiņu kopas svaru sauksim tās elementu vērtību summu. Tālākajos spriedumos runāsim tās interpretācijas valodā, kurā sniedzām 3. teorēmas pierādījumu. Šajos apzīmējumos stratēģijas uzvaras varbūtība ir vienāda ar atbilstošās plusiņu kopas svaru.

Piemērs 3. *Stratēģijas "abiem spēlētājiem vienmēr atbildēt 1" ($u_i = v_i = 1$) plusiņu kopa ir matricas diagonāle, bet šīs stratēģijas svars ir matricas diagonāles elementu summa, ko sauc arī par matricas pēdu (*trace*).*

Pieņemsim, ka $n = 2k$. Skaidrs, ka šāds pieņēmums mūsu situāciju nevar pasliktināt, jo jebkurš varbūtību sadalījums n izvadu spēlei ir apakšgadījums $n+1$ izvada spēlei; patiešām – varam vienkārši piekārtot $\pi(i, n+1) = \pi(n+1, i) = 0$. Tāpēc no noteiktas uzvaras varbūtības sasniedzošas stratēģijas eksistences lielākai matricai, seko šādas stratēģijas eksistence arī mazākai matricai, t.i. ar $n = 2k - 1$.

Tālāk izveidosim determinētu stratēģiju multikopu un spēlētāju varbūtiskā stratēģija V būs nejauši (to spēlētāji var izdarīt kopīgo nejaušo bitu dēļ) izvēlēties vienu no šīm determinētajām stratēģijām.

Aplūkosim $\binom{2k}{k}$ šādas stratēģijas: pirmais spēlētājs izvēlas kādus k ievadus $a_1, \ldots, a_k$, kuriem vienmēr atbildē dos "1", pārējiem ievadiem atbildot "0". Otrai spēlētājs darīs tieši tāpat: ievadiem $a_1, \ldots, a_k$ atbildē vienmēr dos "1", bet pārējiem – "0". Vēl stratēģiju multikopā papildus $2\binom{2k-2}{k-2}$ reizes iekļausim stratēģiju "atbildēt konstanti", kurā pirmais spēlētājs vienmēr atbildēs "0", bet otrais – vienmēr "1"; kopā būsim ieguvuši $N = \binom{2k}{k} + 2\binom{2k-2}{k-2}$ stratēģijas $D_1, \ldots, D_N$.

Mēs apgalvojam, ka sagaidāmā uzvaras varbūtība šādai varbūtiskai stratēģijai ir vismaz $\frac{2}{3}$. No vidējās vērtības īpašībām seko:

$$E[V] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[D_i]$$

.

Izrēķināsim cik reizes katrs no plusiņu kopu elementiem ir ieskaitīts summā $\sum_{i=1}^{N} E[D_i]$. Mēs apgalvojam, ka šajā summā katrs matricas elements ir sastopams tieši $\binom{2k}{k}$ reizes, tāpēc šīs summas vērtība ir $\binom{2k}{k}$, jo visu matricas elementu moduļu summa ir 1.

Spriedīsim šādi: katrs elements $a_{i,i}$ no "atbildēt konstanti" stratēģijām neparādās vispār (jo pārim (i,i) spēlētāji vienmēr dod pretējas atbildes, kad vajadzētu dot vienādas), bet tieši vienu reizi no katras no pārējām $\binom{2k}{k}$ stratēģijām (jo pielietojot šo stratēģiju spēlētāji vienmēr dod vienādas atbildes). Katrs elements $a_{i,j}$ $(i \neq j)$ no katras no $2\binom{2k-2}{k-2}$ "atbildēt konstanti" stratēģijām parādās tieši vienu reizi, savukārt starp pārējām stratēģijām parādās tajās, kur pirmā spēlētāja izvēle ir i dot atbildi "0" un j dot atbildi "1" ($\binom{2k-2}{k-1}$ iespējas – atlikušie $k-1$ "1" ir jāsadala pa $2k-2$ ievadiem) vai i dot atbildi "1" un j dot atbildi "0" (arī $\binom{2k-2}{k-1}$ iespējas). Saskaitot visus variantus iegūstam: $2\binom{2k-2}{k-2} + \binom{2k-2}{k-1} + \binom{2k-2}{k-1} = 2\binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k-1} + \binom{2k-1}{k} = \binom{2k}{k}$.

Tālāk atliek izrēķināt sagaidāmo uzvaras varbūtību:

$$\begin{aligned}
E[V] &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[D_i] = \\
&= \frac{1}{\binom{2k}{k} + 2\binom{2k-2}{k-2}}\binom{2k}{k} = \frac{\frac{(2k)!}{k!k!}}{\frac{(2k)!}{k!k!} + 2\frac{(2k-2)!}{(k-2)!k!}} = \\
&= \frac{\frac{(2k-1)2k}{(k-1)k}}{\frac{(2k-1)2k}{(k-1)k} + 2} = \frac{\frac{4k-2}{k-1}}{\frac{(4k-2)+2(k-1)}{k-1}} = \\
&= \frac{4k-2}{6k-4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9k-6}
\end{aligned}$$

Prasītais ir pierādīts. □

3.4 Kvantu stratēģiju analīze

Lai pierādītu šajā apakšnodaļā galveno rezultātu mums būs vajadzīgas Košī nevienādības sekas:

Teorēma 15 (Košī nevienādība). *Katriem reāliem $a_1, \ldots, a_n$ un $b_1, \ldots, b_n$ ir spēkā:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

pie tam vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja vai nu $b_1 = \ldots = b_n = 0$ vai arī eksistē tāds λ, ka $a_1 = \lambda b_1$, …, $a_n = \lambda b_n$.

Sekas 16. *Katriem reāliem* $a_1, \ldots, a_n$ *ir spēkā:*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leqslant n(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

Pierādījums. Seko tiešā veidā no Koši nevienādības izvēloties b_i komplektu, kam $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$. □

Uzreiz brīdināsim lasītāju, ka zemāk dotajos pierādījumos daži tehniski pārveidojumi nav izrakstīti pilnībā, lai uz labotu šo jau tā garā pierādījuma lasāmību.

Vispirms pierādīsim, ka vissliktākais sadalījums varbūtību sadalījums (t.i. tikko aplūkotais $(\frac{1}{3n}, \frac{2}{3(n^2-n)})$-vienmērīgais varbūtību sadalījums) klasiskajām stratēģijām nedod nekādu priekšrocību kvantu stratēģijām – uzvaras varbūtība ir tāda pati.

Teorēma 17. *EQUAL-EQUAL spēlei ar* $(\frac{1}{3n}, \frac{2}{3(n^2-n)})$ *vienmērīgu varbūtību sadalījumu nav kvantu priekšrocības.*

Pierādījums. Vispirms novērtēsim kvantu stratēģiju maksimālo uzvaras varbūtību no augšas. Pēc Tsirelson teorēmas (2. teorēma), lai noskaidrotu labākās kvantu stratēģijas uzvaras varbūtību mums ir jāmaksimizē šādas izteiksmes vērtība:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \langle u_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \rangle$$

Pamatosim, ka šī izteiksme savu maksimumu sasniedz tad, ja visi u_i ir paralēli atbilstošajām summām $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j$. Tā kā izteiksmes $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j$ no u_i nav atkarīgas, tad u_i varam izvēlēties neatkarīgi.

Tālāk izmantosim faktu, ka $\langle a, b \rangle = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos \angle(a, b)$, tāpēc fiksētam $||a|| = 1$ izteiksmes vērtība tiek maksimizēta tad, kad $\cos \angle(a, b) = 1$, un tāpēc $a = \frac{b}{||b||}$ un $\langle a, b \rangle = \langle \frac{a}{||b||}, ||b|| \rangle = ||b||$.

Attiecināsim šo faktu uz $\langle u_i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \rangle$ un iegūsim, ka aplūkojamās izteiksmes maksimums ir: $\sum_{i=1}^{n} \| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \|$. Tā kā aplūkojam (α, β) vienmērīgu varbūtību sadalījumu, tad $\sum_{i=1}^{n} \| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \| = \sum_{i=1}^{n} \|(\alpha + \beta) v_i - \beta \sum_{j=1}^{n} v_j \| = \star$.

Lai novērtētu $\star$ maksimālo vērtību no augšas pietiek novērtēt tās kvadrātu. Apzīmēsim $s = \sum_{j=1}^{n} v_j$ un izmantosim Koši nevienādības sekas:

$$\begin{aligned}
\star^2 &\leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|(\alpha + \beta) v_i - \beta s\|^2 \\
&= n \sum_{i=1}^{n} ((\alpha + \beta)^2 \|v_i\|^2 - 2(\alpha + \beta)\beta \langle v_i, s \rangle + \beta^2 \|s\|^2) \\
&= n[n(\alpha + \beta)^2 + n\beta^2 \|s\|^2 - 2(\alpha + \beta)\beta \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, s \rangle] \\
&= n[n(\alpha + \beta)^2 + n\beta^2 \|s\|^2 - 2(\alpha + \beta)\beta \|s\|^2] \\
&= n[n(\alpha + \beta)^2 + \|s\|^2 (n\beta^2 - 2(\alpha + \beta)\beta)] = *
\end{aligned}$$

Aplūkosim izteiksmi $n\beta^2 - 2(\alpha+\beta)\beta$; mēs gribēsim atkarībā no šīs izteiksmes zīmes no augšas novērtēt $*$. Ievietojot $\alpha = \frac{1-(n^2-n)\beta}{n}$ pēc nelieliem algebriskiem pārveidojumiem iegūstam: $\frac{\beta(\beta n(3n-4)-2)}{n}$.

Lemma 18. *Izteiksmes $\frac{\beta(\beta n(3n-4)-2)}{n}$ vērtība ir negatīva, ja $\beta \in [0, \frac{2}{n(3n-4)}]$, bet pozitīva, ja $\beta \in [\frac{2}{n(3n-4)}, \frac{1}{n^2-n}]$.*

Pierādījums. Noskaidrosim kādos intervālos izteiksmes vērtība dilst un kādos aug. Aplūkosim šīs izteiksmes atvasinājumu pēc β; tas ir $\beta(6n-8) - \frac{2}{n}$. Pielīdzinot to 0 iegūstam $\beta = \frac{1}{n(3n-4)}$. No tā varam secināt, ka ja $\beta \in [0, \frac{1}{n(3n-4)})$, tad izteiksmes vērtība dilst, bet ja $\beta \in (\frac{1}{n(3n-4)}, \frac{1}{n^2-n}]$ - izteiksmes vērtība aug.

Pie $\beta = 0$ izteiksmes vērtība ir 0, atradīsim otru punktu, kur izteiksmes vērtība ir 0. Pielīdzinot izteiksmi 0 iegūstam, ka $b = 0$ vai $b = \frac{2}{n(3n-4)}$.

Tā kā $\frac{1}{n(3n-4)} < \frac{2}{n(3n-4)}$, tad esam ieguvuši, ka intervālā $\beta \in [0, \frac{2}{n(3n-4)}]$ izteiksmes vērtība ir nepozitīva, bet intervālā $\beta \in [\frac{2}{n(3n-4)}, \frac{1}{n^2-n}]$ izteiksmes vērtība ir nenegatīva. $\square$

Lai novērtētu $*$ no augšas varam rīkoties šādi:

- ja $\beta \in [0, \frac{2}{n(3n-4)}]$, tad varam atmest $*$ negatīvo daļu un iegūt, ka $* \leqslant n^2(\alpha+\beta)^2$. Izsakot α ar β iegūstam $(\beta(n-2)n-1)^2$ un tātad $\star \leqslant 1 - \beta(n-2)n$
- ja $\beta \in [\frac{2}{n(3n-4)}, \frac{1}{n^2-n}]$, tad varam novērtēt $\|s\| \leqslant n$ (jo s ir n vienības vektoru summa) un iegūt, ka $* \leqslant n[n(\alpha+\beta)^2 + n^2(n\beta^2 - 2(\alpha+\beta)\beta)] = (1-2\beta(n-1)n)^2$. Tātad $\star \leqslant 2\beta(n-1)n - 1$.

Ievietojot šajā analīzē $\beta = \frac{2}{3n^2-3n}$ iegūstam, ka $\star \leqslant \frac{n+1}{3(n-1)}$. Redzam, ka iegūtā uzvaras varbūtības mīnus zaudējuma varbūtības vērtība sakrīt ar to, kas iepriekš iegūta klasiskajām stratēģijām. $\square$

Patiesībā ir spēkā daudz spēcīgāks rezultāts – nevienam no (α, β) vienmērīgiem sadalījumiem nav kvantu priekšrocības:

Teorēma 19. *EQUAL-EQUAL spēlei ar (α, β) vienmērīgu varbūtību sadalījumu nav kvantu priekšrocības.*

Pierādījums. Šajā analīzē izmantosim rezultātus no iepriekšējā pierādījuma. Mums vajadzēs arī vispārināt iepriekš iegūto pierādījumu par klasisko stratēģiju uzvaras varbūtībām.

Vispārināsim 13. teorēmas pierādījumu patvaļīgiem (α, β) vienmērīgiem varbūtību sadalījumiem. Pierādījuma sākumdaļu nemainīgā veidā izmantosim arī šajā pierādījumā; tāpēc varam pieņemt, ka esam pamatojuši, ka ir jāmaksimizē izteiksmes $\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j|$ vērtība. Līdzīgi kā iepriekš tajā simetrijas pēc varam nerūpēties par to kā tieši $+1$ un -1 sadalās pa v_i – svarīgs bija tikai to skaits. Pieņemsim, ka tieši k no v_i ir $+1$, tad spriežot analogi:

$$\sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j| =$$

$$= k|\alpha-(k-1)\beta+(n-k)\beta|+(n-k)|-\alpha+(n-k-1)\beta-k\beta| =$$
$$= k|\beta(n-2k)+(\alpha+\beta)|+(n-k)|\beta(n-2k)-(\alpha+\beta)| =$$
$$= k|1/n-2\beta(k-1)|+(n-k)|1/n+2\beta(k-n+1)| = \dagger$$

Šķirosim gadījumus:

- ja $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1/2}{n^2-n}$, tad $\dagger = 1+2\beta(-2k^2+n+2kn-n^2)$. Šo gadījumu analizēsim vēlāk.
- ja $\frac{1/2}{n^2-n} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{n^2-n}$, tad:
  - ja $0 \leqslant k \leqslant \frac{2\beta n^2-2\beta n-1}{2\beta n}$, tad $\dagger = \frac{(n-2k)(2\beta(n-1)n-1)}{n}$. Šīs funkcijas atvasinājums pēc k ir $-\frac{2(2\beta n(n-1)-1)}{n} < 0$, tāpēc tā ir dilstoša pēc k un pietiek apskatīt $k=0$, tad $\dagger = 2\beta n(n-1)-1$.
  - ja $\frac{2\beta n^2-2\beta n-1}{2\beta n} \leqslant k \leqslant \frac{1+2\beta n}{2\beta n}$, tad $\dagger = 1+2\beta(-2k^2+n+2kn-n^2)$. Šo gadījumu analizēsim vēlāk.
  - ja $\frac{1+2\beta n}{2\beta n} \leqslant k \leqslant n$, tad $\dagger = \frac{(2k-n)(2\beta(n-1)n-1)}{n}$. Šīs funkcijas atvasinājums pēc k ir $\frac{2(2\beta n(n-1)-1)}{n} > 0$, tāpēc tā ir augoša pēc k un pietiek apskatīt $k=n$, tad $\dagger = 2\beta n(n-1)-1$.

Atliek izanalizēt gadījumu $\dagger = 1+2\beta(-2k^2+n+2kn-n^2)$. Šī ir ieliekta kvadrātfunkcija attiecībā pret k un tā savu maksimumu sasniedz tad, ja $k=\frac{n}{2}$, tad $\dagger = 1-\beta(n-2)n$. Varam pārliecināties, ka šāds k der arī gadījumā, ja $\frac{1/2}{n^2-n} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{n^2-n}$, jo $\frac{2\beta n^2-2\beta n-1}{2\beta n} \leqslant \frac{n}{2} \leqslant \frac{1+2\beta n}{2\beta n}$.

Papildus ievērosim, ka ja $\beta \leqslant \frac{2}{n(3n-4)}$, tad $2\beta n(n-1)-1 \leqslant 1-\beta n(n-2)$, bet ja $\beta \geqslant \frac{2}{n(3n-4)}$, tad $2\beta n(n-1)-1 \geqslant 1-\beta(n-2)n$. Atzīmēsim, ka $\frac{1/2}{n^2-n} \leqslant \frac{2}{n(3n-4)}$.

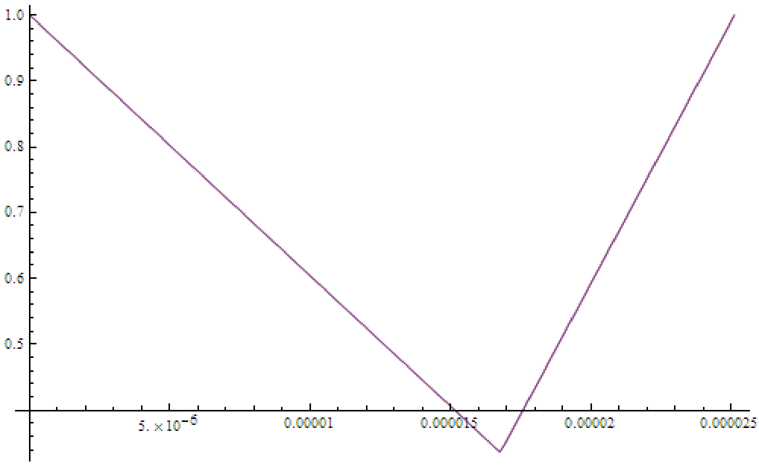
Tagad varam apkopot zināmo:

- ja $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{2}{n(3n-4)}$, tad labākā klasiskā stratēģija sasniedz rezultātu $1-\beta(n-2)n$, kamēr labākajai kvantu stratēģijai mums ir augšējais novērtējums $1-\beta(n-2)n$.
- ja $\frac{2}{n(3n-4)} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{n^2-n}$, tad labākā klasiskā stratēģija sasniedz rezultātu $2\beta n(n-1)-1$, bet labākajai kvantu stratēģijai mums ir augšējais novērtējums $2\beta(n-1)n-1$.

Redzams, ka novērtējumi sakrīt neatkarīgi no β vērtības. Iegūtais novērtējums grafiski ir parādīts 3.1. attēlā. □

Tagad varam pierādīt šādu teorēmu par "average case" gadījumu:

Teorēma 20. *EQUAL-EQUAL spēlei ar* $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2})$ *vienmērīgu varbūtību sadalījumu gan kvantu, gan klasiskajām stratēģijām maksimālā uzvaras varbūtība ir* $\frac{n-1}{n}$ $(n>4)$.



Att. 3.1: Maksimālā uzvaras varbūtība atkarībā no parametra β vērtības ($n = 200$)

Pierādījums. Tikko dotais 19. teorēmas pierādījums dod mums visus līdzekļus, lai aprēķinātu uzvaras varbūtību.

Ja $n \geqslant 4$, tad varam pārliecināties, ka $\frac{2}{n(3n-4)} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2-n}$ un tāpēc uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība ir $2\frac{1}{n^2}(n-1)n - 1 = \frac{n-2}{n}$, tāpēc uzvaras varbūtība ir $\frac{1}{2}(1 + \frac{n-2}{n}) = \frac{n-1}{n}$. □

Šāds rezultāts atbilst mūsu intuīcijai – lieliem n varbūtība, ka tiesnesis izvēlēsies abiem spēlētājiem vienādus ievadus ir neliela ($\frac{1}{n}$). Tādā gadījumā stratēģija vienmēr teikt dažādus izvadus nodrošina garantētu uzvaru visos pārējos gadījumos un tāpēc uzvaras varbūtība ir $\frac{n-1}{n}$.

3.5 Rezultāti un diskusija

Hipotēze par to, ka šādam vispārinājumam – EQUAL-EQUAL spēlei – "worst-case" un "average-case" atšķiras, ir apstiprinājusies, bet papildus tam ir arī iegūts pārsteidzošs rezultāts: šai spēlei ne "worst-case" ne "average-case" gadījumos nav kvantu priekšrocības. Mums nav zināms vai eksistē spēlei ar kvantu priekšrocību, kurai sliktākais sadalījums atšķirtos no vienmērīgā.

Protams, no tā vien, ka"worst-case" un "average-case" gadījums sakrīt kvantiskās un klasiskās uzvaras varbūtības nevaram secināt, ka šīs uzvaras varbūtības sakritīs jebkuram varbūtību sadalījumam. Patiešām: ja n ir vismaz 3, tad spēles matricā var atrast 2×2 apakšmatricu, kas atbilst CHSH spēlei (šādu apakšmatricu veido, piemēram, elementi $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{2,2}$ un $a_{3,2}$).

Tālab, par varbūtību sadalījumu ņemot tādu, kur katram šādas apakšmatricas elementam tiek piekārtota varbūtība $1/4$, bet visiem pārējiem matricas elementiem – varbūtība 0, mēs viegli iegūtu sadalījumu, kuram kvantiskā uzvaras varbūtība ir ≈ 0.85, bet klasiskā – tikai 0.75.

Varam visu zināmo apkopot šādā teorēmā:

Teorēma 21. *EQUAL-EQUAL spēlei ar n spēlētājiem izpildās šādas īpašības:*

1. *zināmam varbūtību sadalījumam gan klasisko, gan kvantisko stratēģiju optimālā uzvaras varbūtība ir $\approx \frac{2}{3}$,*
2. *nezināmam varbūtību sadalījumam gan klasisko, gan kvantisko stratēģiju optimālā uzvaras varbūtība ir $\approx \frac{2}{3}$,*
3. *nevienam no (α, β) vienmērīgiem varbūtību sadalījumiem nav kvantu priekšrocības,*
4. *eksistē varbūtību sadalījums ar kvantu priekšrocību,*
5. *nezināmam varbūtību sadalījumam eksistē varbūtiska stratēģija, kas sasniedz uzvaras varbūtību $\approx \frac{2}{3}$,*
6. *katrai determinētai stratēģijai eksistē tāds varbūtību sadalījums, pie kura tā sasniedz uzvaras varbūtību 0.*

Pierādījums. Gandrīz visus faktus esam pierādījuši jau iepriekš; pierādīsim pēdējo.

Ievērosim, ka nav determinētas stratēģijas, kas nekad nekļūdītos (patiešām – lai kādus u_i, v_i mēs izvēlētos, vismaz vienam no $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$ mūsu stratēģija kļūdīsies). Tātad eksistē vismaz viens ievaddatu pāris (s, t), kam determinētā stratēģija kļūdās. Acīmredzami tāds π, kas ar varbūtību 1 dod pāri (s, t), der par meklēto. □

Rezultāts par to, ka EQUAL-EQUAL spēlei nav kvantu priekšrocības šai sadalījumu klasei autoram šķita ļoti pārsteidzošs. Mēs izdarām divus potenciāli neekvivalentus soļus: izmantojam Koši nevienādību, kurai vienādības nosacījums ir diezgan strikts, un atmetam kādu negatīvu izteiksmi vai novērtējam pozitīvu izteiksmi no augšas ļoti triviālā veidā. Vai patiešām var gadīties, ka abi šie soļi bija ekvivalenti? Ttā vajadzētu būt, jo kvantu stratēģijas ir virsklase klasiskajām, tāpēc, ja kvantu stratēģiju augšējais novērtējums sakrīt ar klasisko apakšējo, tad visām nevienādībām mūsu pierādījumos patiesībā ir jābūt vienādībām.

Autors ar semidefinitās programmēšanas [9] palīdzību pārbaudīja, ka patiešām kvantu uzvaras varbūtību maksimizējošais vektoru komplekts pie $\alpha = \frac{1}{3n}$ nomainās no tāda, kam $||s||^2 = 0$ (kas atbilstu klasiskajai stratēģijai ar $k = n/2$) uz tādu, kam $||s||^2 = n^2$ (kas atbilstu klasiskajai stratēģijai ar $k = n$).

Jautājums par to, kuram varbūtību sadalījumam ir vislielākā atstarpe (*separation*) starp kvantisko un klasisko uzvaras varbūtību ir atklāts.

4. nodaļa

Nejaušu simetrisku spēļu analīze

4.1 Spēļu klases apraksts un motivācija

Šajā nodaļā pētīsim simetrisko spēļu klasi. Tā ir XOR spēļu klases, kurai pieder jau pētītās Ardehali un EQUAL-EQUAL spēles, liela, dabiska apakšklase. Visi šeit izvestie rezultāti ir autora iegūti.

Definīcija 8. *Par **simetrisku spēli** sauc tādu n spēlētāju XOR spēli ar bināriem ievadiem $a_1, \ldots, a_n$, kurai spēlētāju uzvaras predikātu raksturojošie $v_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ ir atkarīgi tikai no a_i summas:*

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{def}{\equiv} \oplus_{i=1}^{n} x_i = v_{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

.

Līdzīgu definīciju varam dot arī ar $c_i = (-1)^{v}_{i}$; tieši šādos c_i apzīmējumos mums būs ērti strādāt turpmāk.

Varam redzēt, ka Ardehali spēle ir simetriska spēle, kurai $v_i = 1$, ja $i \equiv 2, 3 \pmod 4$, bet $v_i = 0$, ja $i \equiv 0, 1 \pmod 4$. Līdzīgi simetriska spēle ir arī, piemēram, triviālā spēle, kur spēlētājiem vienmēr jāizdod vienādas paritātes izvadi. Tomēr šīs spēles būtiski atšķiras: Ardehali spēlei kvantu stratēģijai ir priekšrocība, bet "triviālajai spēlei" šādas priekšrocības nav. Ir dabiski jautāt: kāda priekšrocība kvantu stratēģijām ir nejauši izvēlētai simetriskai spēlei?

Definīcija 9. *Par **nejaušu simetrisku spēli** sauc simetrisku spēli, kuras raksturojošie koeficienti v_i ir izvēlēti nejauši, neatkarīgi un katrs ir 1 ar varbūtību $\frac{1}{2}$ vai -1 ar varbūtību $\frac{1}{2}$.*

Turpmāk analizēsim šādu problēmu: tiesnesis izvēlas nejaušu simetrisku spēli un tās noteikumus (t.i. v_i kortežu) paziņo spēlētājiem. Kāda ir sagaidāmā spēlētāju uzvaras varbūtība, ja tie spēlē optimāli a) klasiski, b) kvantiski?

Šis jautājums nav viegls un arī šīs nodaļas beigās paliek kā neatrisināta problēma, tomēr šajā nodaļā tiks pierādīti vairāki netriviāli novērtējumi par nejaušām simetriskām spēlēm, kā arī doti datoreksperimentu rezultāti un no tiem iegūtas hipotēzes.

4.2 Klasisko stratēģiju analīze

Līdzīgi kā iepriekš analizējot Ardehali spēli individuālo spēlētāju deterministiskās stratēģijas apzīmēsim ar (00), (01), (10), (11). Tā kā aplūkojamā spēle ir simetriska un katrs no ievadiem ir vienlīdz varbūtisks, tad nav svarīgi kā individuālās stratēģijas izkārtotas pa spēlētājiem, bet ir svarīgi cik katra veida individuālās stratēģijas veido kopējo spēlētāju stratēģiju.

Pieņemsim, ka spēlētāju kopējo stratēģiju veido a individuālās stratēģijas (00), b individuālās stratēģijas (01), c individuālās stratēģijas (10) un d individuālās stratēģijas (11). Šādu kopējo stratēģiju unikāli raksturo četrinieks (a, b, c, d). Atzīmēsim, ka arī simetriskām spēlēm (kā XOR spēlēm) ir spēkā 6. teorēma un tāpēc $\binom{n+3}{3}$ potenciālo stratēģiju kopas vietā varam aplūkot $2n + 2$ stratēģiju kopu.

Lai pierādītu netriviālu apakšējo novērtējumu klasisko stratēģiju sagaidāmajai uzvaras varbūtībai, iedomāsimies, ka spēlētājiem ir atļauts lietot tikai divas no stratēģijām $(n, 0, 0, 0)$, $(n − 1, 0, 0, 1)$ (t.i. dod tikai konstantu "jā" vai konstantu "nē"); skaidrs, ka šāds ierobežojums spēlētāju situāciju nevar uzlabot.

Nākamās teorēmas pierādīšanai izmantosim šādu centrālās robežteorēmas variantu [14]:

Teorēma 22. *(Ļapunova CRT trijstūrveida masīviem) Ja* $X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, ..., X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}, \ldots$ *gadījumlielumi, katram* n *gadījumlielumi* $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ *ir neatkarīgi, pie tam katram* $1 \leqslant k \leqslant n$ *izpildās* $E[X_{n,k}] = 0$*,* $\sigma_{n,k} = Var[X_{n,k}] < \infty$ *un papildus izpildās Ļapunova nosacījums:*

$$\exists\delta > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E[|X_{n,k}|^{2+\delta}|] = 0$$

kur $s_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{n,k}^2$*, tad* $\frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Tāpat abu novērtējumu pierādīšanā izmantosim šādu faktu: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, ko viegli pierādīt ar interpretāciju metodi. Tāpat abos novērtējumos ērtības labad runāsim par uzvaru/zaudējumu skaita starpību, kas ir 2^n reizes lielāks lielums kā uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība.

Teorēma 23. *Ja spēlētāji var lietot tikai stratēģiju* $(n, 0, 0, 0)$ *vai stratēģiju* $(n−1, 0, 0, 1)$*, tad sagaidāmā nejaušas simetriskas spēles uzvaru/zaudējumu skaita starpība lieliem* n *tiecas uz* $2^n \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^3 n}} \approx 0.5993 \cdot 2^n \sqrt[4]{1/n}$*.*

Pierādījums. Ievērosim, ka šīs stratēģijas ir pretējas, t.i. kad pirmā kļūdās, tad otrā dod pareizu rezultātu un otrādi, tāpēc maksimums no abu stratēģiju uzvaras/zaudējumu starpības ir vienas stratēģijas uzvaras/zaudējumu starpības absolūtā vērtība ($|x| \stackrel{\text{def}}{\equiv} \max(x, -x)$).

Tā kā šādām stratēģijām visu izvaddatu x_i XOR vienmēr ir konstants, tad patiešām uzvaru/zaudējumu skaita starpības maksimālā vērtība ir $E[| \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i}|]$, jo uz nosacījumu par c_i attiecas tieši $\binom{n}{i}$ ievaddatu komplekti.

Izmantosim Ļapunova centrālo robežteorēmu, lai novērtētu $\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i}$. Skaidrs, ka ir spēkā analoga teorēmas versija ar pārnumurētiem indeksiem, kurā gadījumlielumi ir indeksēti kā $X_{n,0}, \ldots, X_{n,n}$ un izvēlēsimies $X_{n,i} = c_i \binom{n}{i}$. Visi $X_{n,i}$ neatkarīgi, jo atbilstošie c_i ir neatkarīgi, tāpat $\sigma_{n,k} < \infty$. Pamatosim, ka izpildās Ļapunova nosacījums ar $\delta = 4$, t.i.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^6} \sum_{k=0}^{n} E[|X_{n,k}|^6|] = 0$$

Mūsu $X_{n,k}$ šo nosacījumu varam pārrakstīt kā:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^6} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^6 = 0 \tag{4.1}$$

pie tam $s_n^6 = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2)^3 = \binom{2n}{n}^3$. Ievērosim, ka $\binom{n}{k}^6 < \binom{n}{n/2}^6$, tāpēc varam pierādāmo izteiksmi 4.1 pastiprināt kā:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n/2}^6 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\binom{n}{n/2}^6}{\binom{2n}{n}^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\binom{n}{n/2}^2}{\binom{2n}{n}} = 0$$

.

Tagad izmantot Stirlinga formulas sekas $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\frac{4^n}{\pi n/2}}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} n} = 0$$

.

Tātad varam pielietot Ļapunova centrālo robežteorēmu un tāpēc $\frac{1}{\sqrt{\binom{2n}{n}}} \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

No varbūtību teorijas zināms, ka ja $\frac{1}{t}Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, tad $E[|Y|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$, tāpēc lieliem n izpildās $E[|\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i}|] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}\binom{2n}{n}} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 4^n}{\pi\sqrt{\pi n}}} = 2^n \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^3 n}}$. □

4.3 Kvantu stratēģiju analīze

Ambainis et. al rakstā [11] ir pierādīta šāda teorēma par simetriskām spēlēm, kura mums būs svarīga kvantu stratēģiju analīzē, jo ļauj uzdevumu par kvantu stratēģijām reducēt vēl tālāk nekā Tsirelson teorēma – uz uzdevumu par polinomiem:

Teorēma 24. *Simetriskai n spēlētāju spēlei, ko definē parametru kortežs $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ šādi divi apgalvojumi ir ekvivalenti:*

1. *eksistē tāds komplekss $|x| = 1$, ka*

$$|\sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} x^k| = p2^n$$

2. *spēlētājiem eksistē kvantu stratēģija, kurai uzvaras varbūtība mīnus zaudējuma varbūtība ir p.*

Teorēma 25. *Nejaušai simetriskai spēlei sagaidāmā labākās kvantu stratēģijas uzvaru un zaudējumu skaita starpība lieliem* n *ir vismaz* $2^n \sqrt[4]{\frac{1}{\pi n}} \approx 0.7512 \cdot 2^n \sqrt[4]{1/n}$.

Pierādījums. Mēs gribam novērtēt $\mathsf{E}[\max_x | \sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} x^k|]$ no apakšas. To izdarīsim divos soļos, pirmkārt aplūkosim maksimumu nevisi pāri visiem x, bet gan pāri visām n-tās pakāpes saknēm no 1. Apzīmēsim $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ un apskatīsim šādu novērtējumu:

$$\mathsf{E}[\max_{x \in \{w^0, \dots, w^{n-1}\}} |\sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} x^k|]$$

Tālāk novērtēsim maksimumu no apakšas ar vidējo kvadrātisko:

$$\mathsf{E}[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} |\sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} w^{dk}|^2}]$$

Tālāk apskatīsim $\sum_{d=0}^{n-1} | \sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} w^{dk}|^2$ vērtību; no absolūtās vērtības definīcijas kompleksiem skaitļiem seko, ka aplūkojamā izteiksme ir vienāda ar šādu:

$$\sum_{d=0}^{n-1} \left((\sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} \cos \frac{2\pi}{n} dk)^2 + (\sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} \sin \frac{2\pi}{n} dk)^2 \right)$$

Atvērsim iekavas un iegūsim:

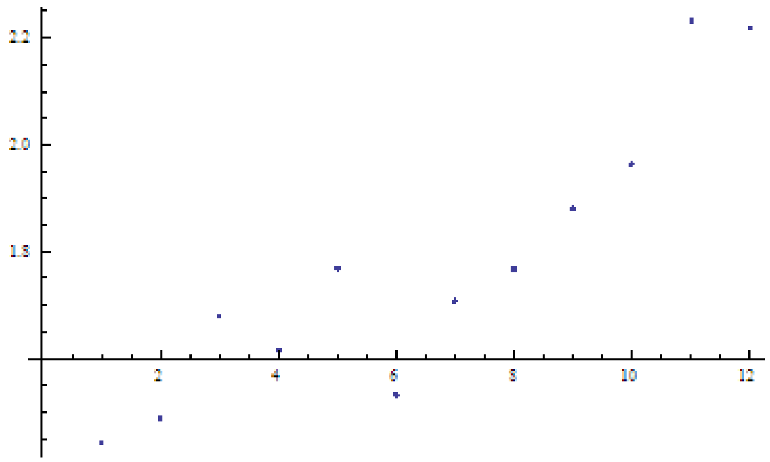
$$\sum_{d=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \nu_k^2 \binom{n}{k}^2 \left(\cos^2 \frac{2\pi}{n} dk + \sin^2 \frac{2\pi}{n} dk \right) +$$
$$\sum_{d=0}^{n-1} 2 \sum_{k<j} \nu_k \nu_j \binom{n}{k} \binom{n}{j} (\cos \frac{2\pi}{n} dk \cos \frac{2\pi}{n} dj + \sin \frac{2\pi}{n} dk \sin \frac{2\pi}{n} dj) =$$
$$= \sum_{d=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 + 2 \sum_{k<j} \nu_k \nu_j \binom{n}{k} \binom{n}{j} \cos \frac{2\pi}{n} d(k-j) \right) =$$
$$= n \binom{2n}{n} + 2 \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{k<j} \nu_k \nu_j \binom{n}{k} \binom{n}{j} \cos \frac{2\pi}{n} d(k-j)$$

Lai gan pēdējā dubultsumma neizskatās vienkārša, tomēr vairums tās locekļu pazūd. Izmantosim šādu faktu: ja $l \equiv 0 \pmod{n}$, tad $\sum_{i=0}^{n} \cos \frac{2\pi l}{i} = n$, bet pretējā gadījumā $\sum_{i=0}^{n} \cos \frac{2\pi l}{i} = 0$. Tālāk redzam, ka gandrīz visiem $k < j$ ir spēkā $k - j \not\equiv 0 \pmod{n}$, tāpēc šīs atbilstošās summas ir vienādas ar nulli; paliek tikai viens k, j pāris: $(0, n)$. Redzams, ka summa ir vienāda ar:

$$n \binom{2n}{n} + 2n\nu_0\nu_n$$

Tātad esam vidējo vērtību novērtējuši kā:

$$\mathsf{E}[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} |\sum_{k=0}^{n} \nu_k \binom{n}{k} w^{dk}|^2}] = \mathsf{E}[\sqrt{\frac{1}{n} \left(n \binom{2n}{n} + 2n\nu_0\nu_n \right)}] =$$
$$= \mathsf{E}[\sqrt{\binom{2n}{n} + 2\nu_0\nu_n}]$$



Att. 4.1: Kvantu stratēģijas vidējās pārākums pār kvantu apakšējo novērtējumu, ja $n = 2^k$

Lieliem n savukārt $2\nu_0\nu_n \in \{-2, +2\}$ ir niecīgs salīdzinājumā ar $\binom{2n}{n}$, tāpēc diezgan precīzi varam teikt, ka vidējā vērtība tiecas uz $\sqrt{\binom{2n}{n}} \sim 2^n \sqrt[4]{\frac{1}{\pi n}}$, ko arī vajadzēja pierādīt.

$\square$

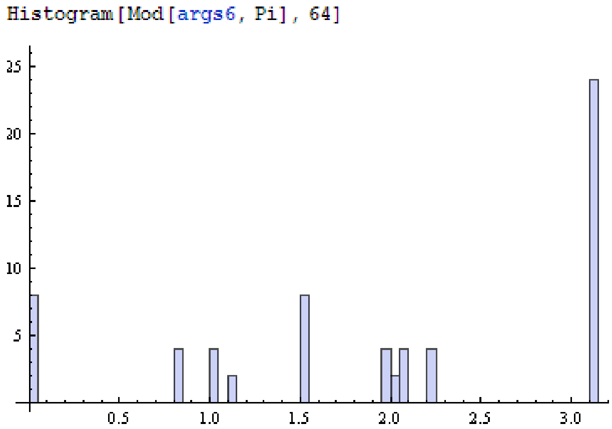
4.4 Rezultāti un diskusija

Lai gan esam varējuši parādīt netriviālus apakšējos novērtējumus nejaušām simetriskām spēlēm, tomēr problēma vēljoprojām ir atklāta. Varam atzīmēt, ka pierādītais apakšējais novērtējums klasiskajām stratēģijām ir pietiekams, lai **izslēgtu** iespēju, ka nejaušai simetriskai spēlei klasisko stratēģiju uzvaras varbūtības nobīde ir **eksponenciāli zemāka** nekā kvantu stratēģijām. Tātad Ardehali spēle pavisam noteikti šajā ziņā ir izņēmums, nevis tipisks paraugs.

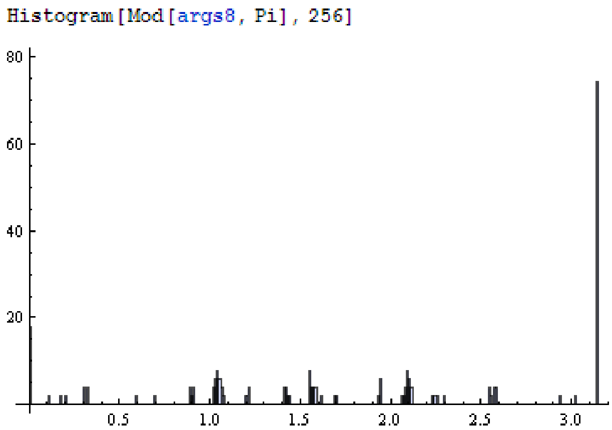
Līdzīgus secinājumus ļauj izdarīt arī datoreksperimentu rezultāti. 4.1. attēlā redzam, ka sagaidāmā kvantu stratēģijas uzvaras varbūtība no apakšējā novērtējuma atšķiras ar logaritmisku reizinātāju. Tātad, acīmredzot, vajadzētu uzlabot apakšējo novērtējumu.

Lai saprastu kādi ir maksimizējošie x (24. teorēmas izpratnē) autors veica datoreksperimentus, lai noskaidrotu atbilstošo x leņķi. Iegūtās histogrammas pie $n = 6$ un $n = 8$ ir redzamas 4.2. un 4.3. attēlā. Var redzēt, ka lielākajai daļai spēļu leņķis π ir optimāls, tātad eksistē laba klasiskā stratēģija, bet ar vidējo kvadrātisko novērtēt "mazticamus" leņķus nav bijis pārāk precīzi. Pie $n = 6$ izvēloties trīs šādus leņķus π, $\pi/2$, $3\pi/2$ (visi ir pīķi histogrammā) tika iegūts novērtējums, kas bija ļoti tuvs precīzajam. Tas mudina mēģināt līdzīgu ne tik vienmērīgu sadalījumu izmantot arī vispārīgajā gadījumā.

Analizējot klasiskās stratēģijas autors ieguva, ka vairāk nekā 96% gadījumos tās divas, kas minētas 23. teorēmas pierādījumā arī ietilpst optimālo stratēģiju kopā katrai spēlei. Tāpat tika iegūts, ka stratēģiju kopa, kas minēta 6. teorēmā ir gandrīz optimāla tādā nozīmē, ka vairāk simetriju nav: izmetot pat nelielu daļu no šīs kopas, mēs samazinam sagaidāmo optimālās stratēģijas uzvaras varbūtību.



Att. 4.2: Labākās kvantu stratēģijas leņķu histogramma visām 6 spēlētāju spēlēm



Att. 4.3: Labākās kvantu stratēģijas leņķu histogramma visām 8 spēlētāju spēlēm

Diemžēl analizēt klasiskās stratēģijas lielam spēlētāju skaitam ar autora lietotajiem algoritmiem ($\Theta(n2^n)$ vienas spēles pārbaudei) ir grūti, tāpēc no šiem rezultātiem līdzīgu secinājumu, kā par logaritmisku reizinātāju kvantu stratēģijām, izdarīt vēl nevaram.

Noslēgums

Par galvenajiem darba sasniegumiem autors uzskata šos:

- Ardehali spēles klasiskā gadījuma pilnīgu analīzi (iesniegta publicēšanai žurnālā "Theoretical Computer Science"),
- EQUAL-EQUAL spēles pilnu analīzi "worst-case" un "average-case" sadalījuma modeļos,
- apakšējos novērtējumus nejaušām simetriskām spēlēm un atbilstošos datoreksperimentus, kas var palīdzēt izprast šīs spēļu klases struktūru.

Autors uzskata, ka ir attaisnots darba mērķis, jo ir gan izdarīti vispārināmi spriedumi par konkrētām kvantu spēlēm, gan analizēta plaša kvantu spēļu klase (nejaušās simetriskās spēles). Tāpat par EQUAL-EQUAL spēli ir pierādīta darba vadītāja izteiktā hipotēze, ka šai spēlei "worst-case" uzvedība atšķiras no "average-case" uzvedības, tādējādi sniedzot pamatojumu šādas jaunas spēles piemēram.

Noslēgumā varam formulēt divas neatrisinātas problēmas, kas radušās darba rakstīšanas gaitā:

- vai jebkuram n Ardehali spēle dod vislielāko atstarpi kvantu un klasiskām stratēģijām?
- vai eksistē spēle ar kvantu priekšrocību, kurai sliktākais sadalījums atšķirtos no vienmērīgā?

Tāpat neatrisināts paliek uzdevums par nejaušo simetrisko spēļu klases pilnu analīzi.

Pateicības

Autors izsaka pateicību darba vadītājam profesoram Andrim Ambainim par interesantās darba tēmas ieteikšanu, norādījumiem un daudzajām vērtīgajām sarunām, kas ievērojami uzlaboja darba kvalitāti.

Pateicība pienākas arī autora kolēģiem projektā "Quantum Computer Science": Artūram Bačkuram, Kasparam Balodim un Jurim Smotrovam, ar kuriem kopā tika veikta vairāku citu kvantu spēļu analīze, un kopīgi iegūtā pieredze ir palīdzējusi arī šajā darbā.

Vairākās vietās darbā autors atsaucas uz kopīgiem rezultātiem ar Andri Ambaini, Dmitriju Kravčenko, Nikolaju Nahimovu un Aleksandru Rivošu, raksta [11] līdzautoriem, un vēlas arī šeit pateikties par veiksmīgo sadarbību.

Paldies arī maniem draugiem un ģimenei, kas saprotoši izturējās pret manu aizņemtību darba rakstīšanas gaitā.

Literatūra

[1] Richard P. Feynman. *Simulating physics with computers*, pages 133–153. Perseus Books, Cambridge, MA, USA, 1999.

[2] Lov K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '96, pages 212–219, New York, NY, USA, 1996. ACM.

[3] P. W. Shor. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Review*, 41:303–332, January 1999.

[4] Navroz Patel. Quantum games: States of play. *Nature*, 445:144–146, 2007.

[5] Joseph B. Altepeter, Matthew A. Hall, Milja Medic, Monika Patel, David A. Meyer, and Prem Kumar. Experimental Realization of a Multi-Player Quantum Game. In *Nonlinear Optics: Materials, Fundamentals and Applications*, page PDNTuA2. Optical Society of America, 2009.

[6] M. Ardehali. Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with the number of particles. *Physical Review A*, 46(9):5375–5378, 1992.

[7] Mafalda L. Almeida, Jean-Daniel Bancal, Nicolas Brunner, Antonio Acín, Nicolas Gisin, and Stefano Pironio. Guess Your Neighbor's Input: A Multipartite Nonlocal Game with No Quantum Advantage. *Phys. Rev. Lett.*, 104(23):230404, Jun 2010.

[8] Richard Cleve, Peter Høyer, Benjamin Toner, and John Watrous. Consequences and Limits of Nonlocal Strategies. *Computational Complexity, Annual IEEE Conference on*, 0:236–249, 2004.

[9] S. Wehner. Tsirelson bounds for generalized Clauser-Horne-Shimony-Holt inequalities. *Physical Review A*, 73:022110, 2006.

[10] John Watrous. CPSP 519/619: Quantum Computation. Lecture notes of the University of Calgary course, 2006.

[11] Andris Ambainis, Dmitry Kravchenko, Nikolay Nahimov, Alexander Rivosh, and Madars Virza. On Symmetric Nonlocal Games. Iesniegts publicēšanai žurnālā "Theoretical Computer Science", 2011.

[12] N. David Mermin. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states. *Phys. Rev. Lett.*, 65(15):1838–1840, Oct 1990.

[13] Rajeev Motwani and Prabhakar Raghavan. *Randomized algorithms.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1995.

[14] Patrick Billingsley. *Probability and Measure.* Wiley-Interscience, 3rd edition, 1995.

Pielikums A

Izstrādāto eksperimentu un pārbaužu pirmkods

A.1 `rekurences.nb` – Ardehali spēles rekurenču pārbaude

```
f[izt_, N_] := FullSimplify[(izt /. n -> n + 1) == 8* (15*2^N + 2*izt)]

Table[Table[
   f[FindSequenceFunction[
     Table[Sum[Binomial[8 n + v + 1, 4 i + r], {i, 0, 1000}], {n, 1,
       10}], n], 8 n + v], {r, {3, 0, 2, 1}}], {v, 0, 7}] // TableForm
```

A.2 `paarbaude.m` – EQUAL-EQUAL spēles novērtējumu pārbaude ar semidefinito programmēšanu

```
n=9;
fid=fopen("paarbaude.txt", "w");
for bc = 0:0.01:1
    b=bc/(n^2-n);
    a=(1-bc)/n;
    r=-ones(n,n)*b+eye(n)*(a+b);

    f0=kron([0,1;0,0],r)+kron([0,0;1,0],transpose(r));
    f=zeros(4*n*n,2*n+1);
    f(:,1) = f0(:);
    for i = 1:2*n
       f((i-1)*2*n+i,i+1) = 1.0;
    endfor
    c=ones(1,2*n);
    blks=[2*n];
    x0=2*n*ones(1,2*n);
    z0=eye(2*n);

    [x,z,ul,info,time]=sp(f,blks,c,x0,z0(:),20.0,0.00001,0.00001,0,100);

    zz=reshape(z,2*n,2*n);
```

```
    realz=tril(zz,-1)+transpose(tril(zz,-1))+diag(diag(zz));
    % -trace(reshape(f(:,1),2*n,2*n)*realz)/2

    maxval = -n;
    for w = 0:2^n-1
        vec = 2*bitget(w, n:-1:1)-ones(1,n);
        val = sum(abs(vec*r));
        maxval = max(val, maxval);
    endfor

    fdisp(fid, [bc, ul(2)/2, 1-b*(n-2)*n, 2*b*(n-1)*n-1,
    maxval, ul(2)/2-maxval, sum(sum(realz))]);fflush(fid);
endfor
fclose(fid);
```

A.3 `symmgames.cpp` – datoreksperiments optimālo uzvaras varbūtību noskaidrošanai simetriskām spēlēm

```
#include <algorithm>
#include <cassert>
#include <cmath>
#include <cstdio>
using namespace std;

#define BIT(n, k) (((n) >> k) & 1) /* get k-th bit (0-indexed) in n */
#define BITSUM(n) (__builtin_popcount(n))
#define MAX 25

int binom[MAX+1][MAX+1] = {{0}};

void initbinom()
{
    binom[0][0] = 1;
    for (size_t n = 1; n <= MAX; n++)
    {
        for (size_t k = 0; k <= n; k++)
        {
            binom[n][k] = binom[n-1][k] + (k > 0 ? binom[n-1][k-1] : 0);
        }
    }
    assert(MAX < 10 || binom[10][7] == 120);
}

int winl(int a, int b, int c, int d, int i)
/* coefficient to a[i] when using strategy (a,b,c,d) */
{
    int n = a+b+c+d;
    int r = 0;
    for (int w = 0; w < (1<<n); w++)
    {
        if (BITSUM(w) != i) continue;
        int ones = d;
        ones += BITSUM((w >> a) & ((1 << b)-1));
        ones += c-BITSUM((w >> (a+b)) & ((1 << c)-1));
        r += ones % 2 == 1 ? 1 : -1;
    }
    return r;
```

```
}

void dump_strat(int a, int b, int c, int d)
{
    int n = a+b+c+d;
    for (int i = 0; i <= n; i++)
    {
        printf("%d\t", winl(a, b, c, d, i));
    }
    printf("(%d, %d, %d, %d)\n", a, b, c, d);
}

int gameval(int a, int b, int c, int d, int g)
{
    int r = 0, n = a+b+c+d;
    for (int i = 0; i <= n; i++)
    {
        r += (1-2*BIT(g, i))*winl(a, b, c, d, i);
    }
    return r;
}

int bestval(int g, int n)
{
    int m = 0;
    for (int k = 0; k <= n; k++)
    {
        m = max(m, gameval(n-k, k, 0, 0, g));
    }
    for (int k = 0; k <= n-1; k++)
    {
        m = max(m, gameval((n-1)-k, k, 1, 0, g));
    }
    m = max(m, gameval(n-1, 0, 0, 1, g));
    return m;
}

const static double eps = 1e-4;
const static double pi = acos(-1.0);
double qval(int g, int n, double x)
{
    double re = 0.0, im = 0.0;
    for (int i = 0; i <= n; ++i)
    {
        re += binom[n][i] * (1-2*BIT(g, i)) * cos(x*i);
        im += binom[n][i] * (1-2*BIT(g, i)) * sin(x*i);
    }
    return sqrt(re*re + im*im);
}

double quantum(int g, int n)
{
    double mv = 0.0;
    for (double x = 0.0; x < 2*pi; x += 1e-4)
    {
        mv = max(mv, qval(g, n, x));
    }
    return mv;
}

int main(void)
{
```

```
    freopen("saliidz-11", "w", stdout);
    initbinom();
    int n = 11;
    for (int g = 0; g < (1<<n); g++)
    {
        printf("%d\t%0.4f\t%d\n", bestval(g, n), quantum(g, n), g);
    }
}
```

A.4 `sym-nov.nb` – datoreksperimenti simetrisko spēļu analīzei

```
CircleDivisions[k_] := Table[Exp[2 Pi I i/k], {i, 0, k - 1}];

Parametric[n_] := Abs[Sum[a[i] x^i Binomial[n, i], {i, 0, n - 1}]]

RealExpec[n_] :=
  Table[NMaxValue[
    Abs[r.Table[Exp[x I i] Binomial[n, i], {i, 0, n - 1}]], x], {r,
    Tuples[{-1, 1}, n]}];

RealValues = ParallelTable[Mean[RealExpec[k]], {k, 1, 8}]

{1., 3., 6.14575, 12.1152, 23.4521, 45.387, 89.3895, 173.446}

ParExpec[n_, k_] :=
 FullSimplify[
  Sqrt[Mean[Table[Parametric[n]^2, {x, CircleDivisions[k]}]]] //
   FullSimplify,
  Fold[And, True,
   Table[a[i]^2 == 1 && Element[a[i], Reals], {i, 0, n}]]]

ParValues = Table[ParExpec[n, n], {n, 1, 6}] // N

{1., 2.23607, 4.3589, 8.30662, 15.843, 30.3809}

ParValues/Take[RealValues, Length[ParValues]]

{1., 0.745356, 0.709254, 0.685637, 0.675546, 0.669374}

RealArgs[n_] :=
 Table[NArgMax[Abs[r.Table[Exp[x I i] Binomial[n, i], {i, 0, n - 1}]],
    x], {r, Tuples[{-1, 1}, n]}]

args6 = RealArgs[6];

args8 = RealArgs[8];

Histogram[Mod[args6, Pi], 64]

Histogram[Mod[args8, Pi], 256]
```

A.5 `paarsn.nb` – datoreksperiments kvantu apakšējā novērtējuma precizitātes noteikšanai

```
Table[n :=
```

```
  2^r; (Table[
     izt = Abs[
       Table[(1 - 2*RandomInteger[])*Binomial[n, k]*Exp[k*x*I], {k,
          0, n}] // Total]; NMaxValue[izt, x], {iter, 1, 10}] //
    Mean)/Sqrt[Binomial[2 n, n]], {r, 1, 12}] // Parallelize

{1.44168, 1.48958, 1.67949, 1.61487, 1.76941, 1.53148, 1.70796, \
1.76769, 1.8812, 1.964514876565096, 2.233011450612498, \
2.218520956630774}
```

A.6 equal-strat.cpp – datoreksperiments ekvivalento klasisko stratēģiju noteikšanai

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <vector>
using namespace std;

static const int n=16;

#define W(x) __builtin_popcount(x)

int main(void)
{
  for (int game=0; game<(1<<n); ++game)
    {
      int best = 0;
      vector<pair<pair<int, int>, int> > besti;

      for (int a=0; a<=n; ++a)
          for (int b=0; a+b<=n; ++b)
          for (int c=0; a+b+c<=n; ++c)
            {
              int d = n-(a+b+c);
              int cur = 0;
              for (int w=0; w<(1<<n); ++w)
            {
              int ww=w;
              int wd=W(ww&((1<<d)-1)); ww >>= d;
              int wc=W(ww&((1<<c)-1)); ww >>= c;
              int wb=W(ww&((1<<b)-1)); ww >>= b;
              int wa=W(ww);
              if ((wb+c-wc+d)%2 == (game&(1<<W(w)))>>W(w))
                cur++;
            }
          if (cur > best) besti.resize(0);
              if (cur >= best)
            {
              best = cur;
              besti.push_back(make_pair(make_pair(a, b), c));
            }
           }
      printf("%d␣%d", game, best);
      for (size_t i=0; i<besti.size(); ++i) {
          int a = besti[i].first.first;
          int b = besti[i].first.second;
          int c = besti[i].second;
          int d = n-(a+b+c);
          printf("␣(%d,␣%d,␣%d,␣%d)", a, b, c, d);
```

```
      }
      printf("\n");
      fflush(stdout);
    }
}
```

Bakalaura darbs

"Dažu kvantu spēļu analīze"

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai. Piekrītu sava darba publicēšanai internetā.

Autors: ________________

(Autora paraksts)

Ar savu parakstu apliecinu, ka esmu lasījis augšminēto bakalaura darbu un atzīstu to par **piemērotu/nepiemērotu** (nevajadzīgo svītrot) aizstāvēšanai Latvijas Universitātes datorzinātņu bakalaura studiju programmas gala pārbaudījuma komisijas sēdē.

Darba vadītājs: ________________

(Vadītāja paraksts)

Darbs iesniegts Datorikas fakultātē ________________________

(Iesniegšanas datums)

Ar šo es apliecinu, ka darba elektroniskā versija ir augšupielādēta LU informatīvajā sistēmā.

Metodiķe: ________________________

(Metodiķes paraksts)

Recenzents: ________________________

(Recenzenta paraksts)

Darbs aizstāvēts datorzinātņu bakalaura pārbaudījumu komisijas sēdē

________________ prot. Nr. ________, vērtējums________

(Darba aizstāvēšanas datums)

Komisijas sekretārs: ________________________

(Sekretāra paraksts)